Physik I/II - Zusamenfassung

Patrick Pletscher

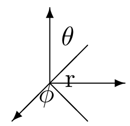
19. Oktober 2003

1. Einleitung

1.1. Koordinatensysteme

Kugelkoordinaten

$x = r\sin\theta\cos\phi$
$y = r\sin\theta\sin\phi$
$z = r\cos\theta$



$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$\tan\phi = \frac{y}{x}$
$\cos\theta = \frac{z}{r}$

$0 \leq \theta \leq \Pi$
$0 \leq \phi \leq 2\Pi$

1.2. Vektoren

Skalarprodukt
$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\varphi = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\varphi$

Vektorprodukt
Das Vektorprodukt von zwei Vektoren a und b wird als der Vektor c definiert, dessen Betrag gleich der Fläche des Parallelogramms ist, das die beiden Vektoren aufspannen. Die Richtung von c wird mit der Rechte-Hand-Regel bestimmt und ist immer senkrecht auf a und b.
$\vec{c} \equiv \vec{a}\times\vec{b}$

2. Kinematik

2.1. Bewegung in einer Dimension

mittlere Geschw.: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$
momentane Geschw.: $v(t) = \frac{dx}{dt}$

mittlere Beschl.: $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}$
momentane Beschl.: $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)dt + v_0$ und $x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt + x_0$

Gleichförmige, geradlinige Bewegung
$v(t) = Konst \;\Rightarrow\; a(t) = 0$
$x(t) = x_0 + v_0(t-t_0)$

Gleichförmig beschleunigte, gradlinige Bewegung
$a(t) = a_0$
$v(t) = v_0 + a_0(t-t_0)$
$x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a_0(t-t_0)^2$

Beschleunigung durch die Gravitation
$g \approx 9.8 m/s^2$
$g_{Mond} \approx 1.67 m/s^2$

2.2. Bewegung in mehreren Dimensionen

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y$

ähnlich wie Bewegung in einer Dimension: Geschwindigkeit und Beschleunigung aufspalten.

2.3. Gleichförmige Kreisbewegung

$\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\phi}{dt}\vec{e}_\phi$
$\vec{a}(t) = (\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\phi}{dt})^2)\vec{e}_r + (2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt} + \frac{d^2\phi}{dt^2})\vec{e}_p hi$

1. Die Winkelgeschwindigkeit ω:
   $\omega = \frac{2\Pi}{T}$
   wobei T die Periode des Umlaufs ist.

2. Die (tangentiale) Geschwindigkeit:
   $\vec{v} = r\omega\vec{e}_\phi \quad |\vec{v}| = v = r\omega$

3. Die (zentripetale) Beschleunigung:
   $\vec{a} = -\omega^2\vec{r} \;\; |\vec{a}| = a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$

3. Masse, Impulserhaltung und die Mechanik

3.1. Impuls und Impulserhaltung

$\vec{p} = m\vec{v} \;\; [p] = \frac{kgm}{s}$

In einem isolierten (keine Wechselwirkung mit anderen Körpern) System ist der Gesamtimpuls erhalten.
$\vec{p}_{tot} = Konst$

3.2. 1. Newtonsche Gesetz: Trägheit

Trägheitsprinzip: Ein Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit, wenn er isoliert (oder frei) ist.

3.3. 2. Newtonsche Gesetz: Aktionsprinzip

Die resultierende Kraft, die auf einen Körper wirkt, wird als die zeitliche Änderung des Impulses des Körpers definiert:
$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}$
$\vec{F} \equiv m\vec{a}(t)\ \ [F] = \frac{kgm}{s^2} = N$

Kraftstoss
$\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(t)dt = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0)$

3.4. 3. Newtonsche Gesetz: Aktion=Reaktion

Aktions-Reaktions-Prinzip: Zu jeder Aktion gehört eine gleich grosse Reaktion, die denselben Betrag besitzt aber in die entgegengesetzte Richtung zeigt.

Isoliertes System mit zwei Körpern A und B:
$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$: Aktion = Reaktion

3.5. Anwendungen

Laufen auf dem Eisenbahnwagen
Eisenbahnwagen mit Masse M und Geschw. v_0. Mensch der Masse m läuft in entgegenges. Richtung mit v_{rel}

Bevor zu Laufen beginnt: $p_{tot} = mv_0 + Mv_0$
Nachher: $p_{tot} = m(v_1 - v_{rel}) + Mv_1$
$\Delta v = v_1 - v_0 = \frac{mv_{rel}}{(m+M)}$

Schiefe Ebene
$\vec{N} + M\vec{g} = \vec{F}_{resultierende} = M\vec{a}$
$Ma_x = Mg\sin\theta$ und $N = Mg\cos\theta$
$a_x = -g\sin\theta$

Rückstellkraft: Die Federkraft
$F = -k(x - x_0) = -k\Delta x$
k=Federkonstante, $[k] = \frac{N}{m}$
$E = \frac{k}{2}\Delta x^2$
z.Bsp. bei Federpendel $\Delta x = A$

Berechnung der Masse der Erde
$|\vec{a}_{Mond}| = \frac{v_{Mond}^2}{r_{Mond}} = \frac{4\Pi^2 r_{Mond}}{T^2}$
$m_{Mond}a_{Mond} = G\frac{m_{Mond}m_{Erde}}{r_{Mond}^2}$
$m_{Erde} = \frac{4\Pi^2 r_{Mond}^3}{GT^2}$

Bewegung mit Rollen

Gesetz von Newton: $mg - S = ma$

Masse M auf horizontaler Fläche und Masse m über Rolle damit verbunden, aber vertikal.
$|\vec{S}_1| = |\vec{S}_2| \equiv S$
$S = Ma:\ \ mg - S = ma$

Atwoodsche Maschine
Zwei Massen m_1 und m_2 hängen über eine Rolle an einem Faden.
$S - m_1 g = m_1 a_1\ \ S - m_2 g = m_2 a_2$

3.6. Reibungskräfte

Haftreibungskraft: $F_H = \mu_H N$
z.B. bei schiefer Ebene: $\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_R = 0$

Gleitreibungskraft: $F_R = \mu_G N$
z.B. bei schiefer Ebene: $\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_R = m\vec{a}$
$a_x = g(\sin\alpha - \mu_G\cos\alpha)$

Luftwiderstand
$\vec{F} = -K\eta\vec{v}$
$mg = K\eta v_e \Rightarrow v_e = \frac{mg}{K\eta}$ Masse m die nach unten fällt.

3.7. Das Newtonsche Gravitationsgesetzt

$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$
$G = 6.67 * 10^{-11} Nm^2/kg^2$

Gravitationskraft eines homogenen Rings
Ring mit Radius a und Masse m, zweite Masse m_0 im Abstand x auf Achse des Rings.
$F_x(x) = -\frac{Gmm_0}{x^2+a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = -Gmm_0\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$

3.8. Zentripetalkraft

$\frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$

4. Energie

4.1. Allgemeines

Bei allen Vorgängen muss die Gesamtenergie eines Systems und seiner Umgebung erhalten werden.

Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3 * 10^8 m/s$
Der Geschwindigkeitsparameter $\equiv \frac{v}{c}$

Die Masse eines Teilchens ändert sich mit seiner Geschwindigkeit. m_0=Ruhemasse des Teilchens.
$m \equiv \gamma m_0 \;\; \gamma = \frac{m}{m_0} \approx \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \geq 1$
γ wird als Lorentzfaktor bezeichnet.

Der relativistische Impuls: $\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$

E_0 wird als Ruheenergie bezeichnet. $E_0 = m_0 c^2$

Relativistische (Gesamt-)Energie $E = E_{kin} + m_0 c^2 = \gamma m_0 c^2$

$\frac{v}{c} = \frac{pc}{E}$

$E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$

4.2. Die Masse-Energie Äquivalenz

Strahlungsenergie der Sonne $\approx 4 * 10^{26}$ Joule pro Sekunde

$E = mc^2$ (Masse ist eine Form von Energie)

4.3. Die kinetische Energie

$E_{kin} = (\gamma - 1) m_0 c^2$

für langsam bewegte Körper ($v < 0.1c$) ist sie ungefähr gleich:
$E_{kin} \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$

Ruhemasse-Energie: $E = m_0 c^2$

4.4. Potentielle Energie der Gravitation

Die potentielle Energie eines Körpers, der sich auf einer Höhe h befindet, ist gleich
$E_{pot}(h) = m_0 g h$

4.5. Die Arbeit, die eine Kraft leistet

$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ [Joule (J)]

Bewegung in mehreren Dimensionen:
$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dW = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

Die gesamte zwischen den Punkten 1 und 2 geleistete Arbeit W_{12} wird berechnet als das Linienintegral von $\vec{F}$ entlang der Bahn zwischen den Punkten 1 und 2.

Arbeit der Gewichtskraft:
$W_{12} = -mg(y_2 - y_1)$

Arbeit der Federkraft:
$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$

Leistung

$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F ds}{dt}$

4.6. Allgemeine potentielle Energie

konservative Kräfte, wie Grav.kraft oder Federkraft. Die geleistete Arbeit entlang einem geschlossenen Weg ist gleich null. Wir können eine entsprechende potentielle Energie der Kraft definieren.

nicht-konservative Kräfte, wie die Reibungskraft. Geleistete Arbeit hängt vom Weg ab. Wir können keine entsprechende potentielle Kraft definieren.

4.7. Das Arbeit-Energie Theorem

Die Arbeit, die an einem Körper zwischen zwei Punkten (1) und (2) geleistet wird, ist gleich der Änderung seiner kinetischen Energie zwischen diesen Punkten.
$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m\vec{v}_2^2 - \frac{1}{2} m\vec{v}_1^2$

Schiefe Ebene mit Reibung:
Masse zuerst auf Höhe h, gefragt Geschw. zuunterst
$v = \sqrt{2gh(1 - \frac{\mu_G}{\tan\theta})}$

4.8. Die mechanische Energie

$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot} = konst$
die mechanische Energie wird erhalten, wenn nur konservative Kräfte wirken.

$W_{nk} = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = \Delta(E_{kin} + E_{pot}) = \Delta E$
die Änderung der mechanischen Energie ist gleich der Arbeit die von nicht-konservativen Kräften geleistet wird.

4.9. Beziehung zwischen Kraft und potentieller Energie: Der Gradient

$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_{pot}$
$\vec{\nabla} f(x,y,z) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$

4.10. Allgemeine potentielle Energie der Gravitationskraft

$E_{pot}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{|\vec{r}|} = -\frac{GMm}{r}$

Fluchtgeschwindigkeit:
$E_{mech} = E_{kin}(\vec{v}) + E_{pot}(\vec{r}) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$
auf Erdoberfläche:
$E^A_{mech} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r_E}$

im Unendlichen:
$E^B_{mech} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = 0$ mit $r \to \infty, v \to 0$

$E^A_{mech} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r_E} = E^B_{mech} = 0 \Rightarrow\ v = \sqrt{\frac{2GM}{r_E}}$

5. Schwingungen und Resonanz

5.1. Harmonische Schwingungen

$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$
A=Amplitude
ω=Kreisfrequenz
ϕ=Phasenkonstante
ϕ ist die ursprüngliche Phase zur Zeit t=0

Periode
$\omega T = 2\Pi\ \ \Rightarrow\ \ T = \frac{2\Pi}{\omega}$

Frequenz f
$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\Pi}$ [Hertz (Hz)]

$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$
$v(t) = -A\omega\cos(\omega t + \phi)$
$a(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$

5.2. Die Kraft bei der harmonischen Bewegung

Bei der harmonischen Bewegung ist die Beschleunigung proportional und entgegengesetzt zur Auslenkung.

$F(t) = ma(t) = m(-\omega^2)x(t) = (-m\omega^2)x(t)$
$F(t) = -kx(t)\ \ wobei\ \ k = m\omega^2$
Bei der harmonischen Bewegung ist die Kraft proportional und entgegengesetzt der Auslenkung.

5.3. Differentialgleichung der harmonischen Bewegung

$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}\ \ \Rightarrow\ \ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$
Ansatz: $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$

Für das Federpendel gilt:
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
$T = \frac{2\Pi}{\omega} = 2\Pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

5.4. Das Fadenpendel

Die Auslenkung s ist gleich $s = l\theta$
$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\ \ und\ \ T = \frac{2\Pi}{\omega} = 2\Pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Für kleine Auslenkungen $\sin\theta = \theta \to$ harmonische Schwingung

5.5. Energieerhaltung bei harmonischen Schwingungen

$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)$

Die gesamte mechanische Energie des Systems verändert sich nicht während der Schwingungsbewegung. Die Energie ist erhalten.

5.6. Gedämpfte harmonische Schwingungen

diff. Bewegungsgl:
$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$

Lösung:
$x(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \phi)$
δ: Dämpfungsfaktor
b: Dämpfungskonst. $[b] = \frac{N}{m}$, $b\cdot v = F_0$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2}\ \ und\ \ \delta = \frac{b}{2m}$
ω_0 die Kreisfrequenz der freien Schwingung (=Eigenfrequenz):
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ \ und\ \ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

5.7. Erzwungene Schwingungen und Resonanz

Wir betrachten eine auf das schwingende System wirkende, äussere periodische Kraft, die kosinusförmig ist
$F_{äussere} = F_0\cos(\omega t)$
ω ist die Kreisfrequenz der äusseren Kraft. Die Kreisfrequenz der freien Schwingung ist ω_0

Der stationäre Ansatz der erzwungenen Schwingung wird geschrieben als
$x(t) = A\cos(\omega t - \alpha)$
ω = Kreisfreq. äussere Kraft, A = Amplitude, α = Phasenkonst.
$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}\ \ und\ \ \tan\alpha = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$

Resonanzbedingung (Amplitude maximal):
$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$ Resonanzfrequenz
für schwache Dämpfungen: $\omega \approx \omega_0$

Die Resonanzamplitude kann man berechnen, indem man die Resonanzfrequenz in Formel für Amplitude einsetzt.

6. Mechanische Welle

6.1. Beschreibung der eindimensionalen Wellenausbreitung

Wellenfunktion:
$\xi(x,t)$
x: Raumkoordinate, t: Zeit

Im Allgemeinen betrachten wir die Ausbreitung einer Welle nach rechts oder links. Die Ausbreitung kann dann so geschrieben werden:
$\xi(x,t) = \xi(x \pm vt)$
v: Ausbreitungsgeschw.

$\lambda = \frac{v}{f}$ $[\lambda] = m$

6.2. Harmonische Wellen

$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(k(x \pm vt)) = \xi_0 \sin(kx \pm \omega t)$
k: Wellenzahl, ξ_0: Amplitude

Der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wellenbergen wird λ genannt.

$k(x+\lambda) = kx + 2\Pi \Rightarrow k\lambda = 2\Pi \Rightarrow k = \frac{2\Pi}{\lambda}$
$\omega = kv \;\; oder \;\; v = \frac{\omega}{k}$
Transversale Kraft $= F_t = S\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$

6.3. Berechnung der Ausbreitungsgeschwindigkeit

$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0$
Diese partielle Diff.gl. nennt man Wellengleichung, wobei v die Ausbreitungsgeschw. ist.

Ausbreitungsgeschw. transversaler elastischer Seilwellen
Längendichte ρ
$\rho = \frac{M}{L}$ $[kg/m]$
$v^2 = \frac{S}{\rho} \quad \Rightarrow \quad v = \pm\sqrt{\frac{S}{\rho}}$
S: Spannung des Seils, ρ: Längendichte

6.4. Wellen im Festkörper

Dichte (oder Volumendichte) ρ wird definiert als
$\rho = \frac{M}{V}$ $[kg/m^3]$
M: Masse des Körpers, V: Volumen
Longitudinale elastische Welle im Festkörper
$v = \pm\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$
Y: Konstante[N/m^2]=Elastitätsmodul

$F = YA\frac{\Delta l}{l}$
A: Querschnitt

6.5. Wellen in zwei oder drei Dimensionen

$\xi(\vec{r},t) = f(\vec{r}\cdot\vec{u} - vt)$
stellt eine mehrdimensionale Welle dar, die sich in der Richtung u ausbreitet.

Wellenvektor k:
$\vec{k} \equiv k\vec{u}$
$|\vec{k}| = \frac{2\Pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$
harmonische Welle wird so ausgedrückt:
$\xi = \xi_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

6.6. Prinzip der Superposition

Wenn sich zwei Wellenberge treffen, ist die gesamte Auslenkung gleich der Summe der Auslenkungen der einzelnen Wellenberge. Dieses Eigenschaft wird das Prinzip der Superposition genannt.
$\xi(x,t) = \xi_1(x-vt) + \xi_2(x+vt)$

Superposition harmonischer Wellen
$\xi(x,t) = A\sin(kx_1 - \omega t) + A\sin(kx_2 - \omega t + \delta)$
δ: Phasenunterschied der Quellen; x1,x2: Abstände
$\Delta x = x_2 - x_1$
$\xi = A\sin(kx_1 - \omega t) + A\sin(kx_1 - \omega t + (\delta + k\Delta x)) =$
$2A\cos(\frac{1}{2}(\delta + k\Delta x))\sin(kx_1 - \omega t + \frac{1}{2}(\delta + k\Delta x))$

Für $\frac{1}{2}(\delta + k\Delta x) = n\pi \;\; n = 0,1,2,\cdots$ doppelte Amplitude
Für $\frac{1}{2}(\delta + k\Delta x) = (n+\frac{1}{2})\pi \; n = 0,1,2,\cdots$ Amplitude null

6.7. Stehende Wellen

$n\frac{\lambda}{2} = L \quad n = 1,2,3,\cdots$
$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1,2,3,\cdots$
$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L} \quad n = 1,2,3,\cdots$
bei einer Saite:
$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{S}{\rho}}$ und $f_n = nf_1$

Bewegungsgleichung: $\xi(x,t) = \xi_0 \sin k_n x \cdot \cos\omega_n t$
$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$, $\omega_n = 2\pi f_n$

6.8. Energieübertragung

Intensität: Die Intensität einer Welle ist als die

Energie definiert, die pro Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit senkrecht zur Ausbreitungsrichtung fliesst.

$I = \frac{\langle P\rangle}{A}\ I(t) = \frac{dW}{dt} = -S\xi_0 k\cos(kx-\omega t)\xi_0(-\omega)\cos(kx-\omega t) = Sk\omega\xi_0^2\cos^2(kx-\omega t)$
$\langle I\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)dt = v(\frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2)$

mittlere Intensität = Ausbreitungsgeschw. * Energiedichte
$\langle I\rangle = v\epsilon,\ \ \epsilon = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$

6.9. Kugelwellen

$\frac{dE}{dt} = IA = I(4\pi r^2)$
Die Intensität nimmt umgekehrt mit dem Quadrat des Abstands von der Quelle ab.
$\xi(r,t) = \frac{1}{r}f(r-vt)$ wobei f für eine Funktion steht.

7. Teilchensysteme

7.1. Teilchensysteme mit zwei Massen

ballistisches Pendel: Ein Geschoss wird auf eine aufgehängte Kugel abgefeuert.

Impulserhaltung:
$mv_G + 0 = (m+M)v_{GK}\ \ [v_{GK} = \sqrt{2gh}]$

7.2. Teilchensysteme mit variierender Masse

Raketengleichung

$F_{Sch} = u\cdot|\frac{dM}{dt}| = u\cdot\frac{dm}{dt}$
v = Geschw. Rakete, u = Ausstossgeschw. des Gases relativ zur Rakete, m = Masse ausgest. Gas
$v = uln(\frac{M_0}{M_0-m})$

7.3. Teilchensysteme mit mehreren Massen

Diskreter Fall
$M = \sum_{i=1,N} m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots$

Koninuierlicher Fall
$M = \int dm$

7.4. Bewegung des Teilchensystems

$\vec{F_i} \equiv \vec{F}_{i,int} + \vec{F}_{i,ext}$
$\vec{F}_{ext} \equiv \sum_{i=1,N}\vec{F}_{i,ext} = \sum_{i=1,N}\frac{d\vec{p}i}{dt}$

7.5. Gesamtimpuls des Teichensystems

$\vec{p}_{tot} \equiv \sum_{i=1,N}\vec{p}_i$
$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt}$

7.6. Der Schwerpunkt eines Teichensystems

$\vec{p}_{tot} \equiv M\vec{v}_{SP}$
$M\vec{r}_{SP} \equiv \sum_{i=1,N} m_i\vec{r}_i = \sum_{i=1,N} m_i(x_i\vec{e}_x + y_i\vec{e}_y + z_i\vec{e}_z) = (\sum_{i=1,N} m_ix_i)\vec{e}_x) + (\sum_{i=1,N} m_iy_i)\vec{e}_y) + (\sum_{i=1,N} m_iz_i)\vec{e}_z)$
bei kontinuierlicher Massenverteilung:
$\vec{r}_{SP} \equiv \frac{1}{M}\int\vec{r}dm$

7.7. Die reduzierte Masse

Zwei Massen mit Feder verbunden:
$\mu\vec{a}_{12} = \vec{F}_{12}\ \ und\ \ \frac{1}{\mu} = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})$
Die Massen schwingen mit einer Frequenz:
$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$

7.8. Bewegung bezüglich des Schwerpunkts

$\vec{v}_i = \vec{v}_{SP} + \vec{v}_{i,SP}$
$\vec{p}_{i,SP} = m_i\vec{v}_{i,SP}$
Der Gesmatimpuls des Teilchensystems relativ zu ihrem SP-Koordinatensystem ist gelcih null
$\sum_{i=1,N}\vec{p}_{i,SP} \equiv 0$

7.9. Kinestische Energie eines Teilchensystems

$E_{kin} = \sum_{i=1,N} E_{kin,i} = \sum_{i=1,N}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^2$
$\vec{v}_i = \vec{v}_{SP} + \vec{v}_{i,SP}$

7.10. Gesamtenergie eines Teilchensystems

innere Energie U
$U = E_{kin} + E_{pot,interne} = \frac{1}{2}\sum_{i=1,N} m_i\vec{v}_i^2 + E_{pot,interne}$
Gesamtenergie:
$E = U + E_{pot,externe}$

8. Stossvorgänge

8.1. Erhaltungsgesetze bei Stossvorgängen

Erhaltung des Gesamtimpulses
$\sum_{i=1,N}\vec{p}_i' = \sum_{i=1,N}\vec{p}_i$

Der Wert der Änderung der kinetischen Energie des Teilchensystems heisst Q-Wert der Reaktion:
$Q \equiv E_{kin}(nach) - E_{kin}(vor) = \frac{1}{2}\sum_{i=1,N'} m_i\vec{v}_i'^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1,N} m_i\vec{v}_{i,vor}^2$
Elastischer Stoss: Q=0
sonst Inelastischer Stoss: Q > 0: exoenergetisch, Q < 0: endoenergetisch

$E_{kin} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2m}(m\vec{v})^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m}$

8.2. Schwerpunkt beim Stoss

Streuwinkel
Zwei Massen aufeinander (m_1,v_1 und $m_2, v_2 = 0$)
θ : Winkel im SP

$\tan\theta_1 = \frac{\sin\theta}{\frac{m_1}{m_2}+\cos\theta}$

8.3. Hochenergetische Stossvorgänge

Teilchen bewegen sich relativistisch

$E = \gamma m_0 c^2$
$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$

Impulserhaltung und Energieerhaltung gelten so wieder.

Die gesamte Energie kann als die Summe der kin. Energie und der Ruhemasse dargestellt werden. ($E = m_0c^2 + E_{kin}$)

Massenveränderung Δm ein:

$\Delta m \equiv m_1' + m_2' - m_1 - m_2 = \sum_{i=1,N'} m_i' - \sum_{i=1,N} m_i$
$Q \equiv -(\Delta m)c^2$

9. Drehbewegung

9.1. Der Drehimpuls eines Teilchens

Der Drehimpuls bezüglich einem bestimmten Punkt O wird durch das Vektorprodukt des Ortsvektors r und des (linearen) Impuls p, d.h.
$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} \equiv m(\vec{r} \times \vec{v})$
definiert, wobei m die Masse des Teilchens ist. Der Ortsvektor r wird bezüglich O definiert. Der Drehimpuls hängt vom gewählten Ursprung O ab.
$[L] = \frac{kg.m^2}{s}$
$L = mvr = I\omega = mr^2\omega$

1 Der Drehimp. ist senkr. zur Ebene, die durch den Ortsvektor und den Impuls definiert ist. Er ist senkrecht zur Bewegungsrichtung der Masse.

2 Der Betrag des Drehimpulses ist gleich
$|\vec{L}| = |\vec{r}||\vec{p}|\sin\theta$
wobei θ der von r und p eingeschlossene Winkel ist.

9.2. Das Drehmoment

Das Drehmoment bezüglich einem bestimmten Punkt O wird durch das Vektorprodukt des Ortsvektors r und der Kraft F definiert.
$\vec{M} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$
$M = I\alpha = FR$
Beachte, dass das Drehmoment vom gewählten Ursprung O abhängt.
$[M] = Nm = \frac{kgm^2}{s^2}$

9.3. Erhaltung des Drehimpulses

linearer Impuls:
$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

Drehimpuls:
$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$

$M = rF\sin\theta = (r\sin\theta)F = bmg = Konst.$

9.4. Zentrale Kräfte

Gravitationskraft ist z.B. eine zentrale Kraft.

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = Konst.$

10. Die Bewegung starrer Körper

10.1. Der starre Körper

Ein starrer Körper wird definiert als ein Körper, bei dem die Änderung der Abstände zwischen allen seinen Massenelementen bei Anwendung einer Kraft oder eines Drehmoments vernachlässigt wird.
Ein starrer Körper behält seine Form, wenn er sich bewegt.

Translationsbewegung: alle Teilchen des Körpers beschreiben parallele Bahnen.
Drehbewegung: alle Teilchen beschreiben kreisförmige Bahnen um eine Gerade, die man als Drehachse bezeichnet.

10.2. Vektorielle Beschreibung der Drehbewegung

Der Drehwinkel θ entspricht der Winkelverschiebung des rotierenden Körpers, die der Körper bei der Rotation um die Drehachse überstreicht.

Der Winkelgeschwindigkeitsvektor
$\vec{\omega} \equiv \frac{\Delta\vec{\theta}}{\Delta t}$ $[s^{-1}\ oder\ Radian\ pro\ Sekunde]$

Der Winkelbeschleunigungsvektor
$\vec{\alpha} \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ $[s^{-2}\ oder\ Radian\ pro\ Sekunde\ im\ Quadrat]$

$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{\theta} \times \vec{r}$
Verschiebung des Ortsvektors kann dals das Kreuzprodukt des Drehwinkels und des Ortsvektors geschrieben werden.

10.3. Winkelgeschwindigkeit eines starren Körpers

$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

10.4. Energie des starren Körpers

Wenn der starre Körper sich bewegt, wird seine Bewegung in eine Translation des Schwerpunkts und eine Rotation um den Schwerpunkt aufgeteilt.

Das Trägheitsmoment des Körpers I relativ zur Rotationsachse Δ ist definiert als
$I_\Delta = \sum_{i=1,N} m_i r^2_{\Delta,i}$
Für eine kontinuierliche Masseverteilung ist es gleich:
$I_\Delta = \int r^2 dm \quad [kgm^2]$

Energiesatz: $E = E_{pot} + E_{trans} + E_{rot}$, $\frac{dE}{dt} = 0$
$E_{trans} = \frac{1}{2} M (\vec{v}_{SP})^2$
$E_{rot} = \frac{1}{2} I_{\Delta,SP} \omega^2$

falls Rollbedingung: $\omega^2 = \frac{v_{SP}^2}{R^2}$

10.5. Berechnung des Trägheitsmoments eines starren Körpers

$I_\Delta = \sum m_i r^2_{\Delta,i}$ $I_\Delta = \int r^2 dm$

Trägheitsmoment eines homogenen Ringes mit Radius R
$I_\Delta(Ring) = \int r^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$

Trägheitsmoment eines homogenen Zylinders
$I_\Delta(Zylinder) = \frac{1}{2} MR^2$
(Drehachse = Zylinderachse)

Der Satz von Steiner
Wenn a der Abstand zwischen den beiden parallelen Achsen ist, gilt die folgende Beziehung:
$I = I_{SP} + Ma^2$
wobei I und I_{SP} die Trägheitsmomente relativ zu Δ und Δ_{SP} sind und M die Masse des Körpers darstellt.

10.6. Rollende Körper

Rollbedingung Wenn der Körper sich ohne zu gleiten bewegt, gilt:
$v_{SP} = R\omega$
$\omega = \frac{v_{SP}}{R}$

Zylinder auf schiefer Ebene
Die Beschleunigung hängt vom Trägheitsmoment des Zylinders ab. Je grösser das Trägheitsmoment des Zylinders ist, desto kleiner ist die Beschleunigung.

10.7. Drehimpuls eines starren Körpers und Erhaltungsgesetz des Drehimpuls

Der Drehimpuls eines starren Körpers ist gleich dem Gesamtdrehimpuls der Teilchen des Körpers.
$\vec{L} = \sum_{i=1,N} \vec{L}_i$

Erhaltungsgesetz:
$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$
$\vec{M} = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = Konst.$

10.8. Allgemeine Dynamik der starren Körper

Drehimpulssatz:
$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1,N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,ext} = \vec{M}_{ext}$
$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\vec{a}_{SP} = \vec{F}_{ext}$
$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ext}$

10.9. Drehung des starren Körpers um eine Hauptachse

Im Allgemeinen sind der Drehimpuls und der Winkelgeschwindigkeitsvektor nicht parallel zueinander.

Für jeden Körper gibt es mindestens drei zueinander senkrechte Richtungen, für die der gesamte Drehimpuls parallel zur Winkelgeschwindigkeit ist, falls die Rotation um eine dieser Achsen erfolgt.
Diese Achsen heissen die Hauptachsen.
Für die Rotation um eine Hauptachse gilt:
$\vec{L} = I_\Delta \vec{\omega}$

zweite Newtonsche Gleichung der Drehbewegung:
$\frac{d\vec{L}}{dt} = I_\Delta \vec{\alpha} = \vec{M}_{ext}$
dies gilt aber nur, wenn Vektoren L und ω parallel.

Atwoodsche Maschine mit massiver Rolle
$a = \frac{mg}{(m+\frac{M}{2})} < g$
M: Masse der Rolle

Physikalisches Pendel

starrer Körper, der unter der Wirkung der Gravitationskraft frei um eine horizontale Achse schwingen

kann.
$T = 2\Pi\sqrt{\frac{K^2}{gb}}$
b: Abstand SP von Drehachse, K: Trägheitsradius

10.10. Die Kreiselbewegung

$\Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t$

Die Winkelgeschwindigkeit der Präzession Ω wird definiert als die Winkeländerung pro Zeiteinheit mit der die Achse rotiert.
$\Omega = \frac{mgl}{L} = \frac{mgl}{I\omega}$
l: Länge des Stabs

11. Materie, Atome und Moleküle

11.1. Atome

Elementarteilchen: Protonen, Neutronen und Elektronen
$m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27}\,kg$
$m_n = 1.6749 \cdot 10^{-27}\,kg$
$m_e = 9.1097 \cdot 10^{-31}\,kg$

Nukleonen=Protonen+Neutronen Protonenmasse $\approx$ Neutronenmasse = NUKLEONEN
$\rightarrow$ Nukleonenmasse $m_N \approx 1.67 \cdot 10^{-27}\,kg$

Teilchendichte: $N = \frac{\rho}{m}$
Volumen: $V = \frac{1}{n} = \frac{m}{\rho}$
In gewöhnlicher Masse $N_e = N_p \approx N_n$

Das Elektronenvolt

$1eV = 1.60217 \cdot 10^{-19}\,J$

Das Atom und die Elemente

Jedes Atom besitzt Z Protonen, ebensoviele Elektronen und N Neutronen.
A=Z+N
Z=Ordnungszahl=Protonenzahl=Elektronenzahl

Struktur der Atome

Durchmesser Kern:
$d_{Kern} = 1fm = 10^{-15}m$

Typischer Abstand der Elektronen vom Kern:
$r_{Elektronen} \approx 1Armströng = 10^{-10}m = 10000fm$

Isotope

Atome mit gleichen Ordnungszahl A können versch. Massenzahl A besitzen.

11.2. Die Avogadro-Zahl

$\sharp$ Mole einer Masse m mit N Nukleonen: $\sharp Mole = \frac{m}{N}$
$N_A \approx 6.02214 \cdot 10^{23}$
1 Mol einer bel. Substanz enthält so viele Teilchen wie die Avogadro-Zahl N_A angibt.

Liegen n mol einer Substanz vor, dann enthält sie die folgende Anzahl an Teilchen: $N = nN_A$.

Die Masse eines Mols einer Substanz nennt man molare Masse M. Was im Periodensystem unter relativer Atommasse steht.

11.3. elektr. Ladung

$q_e = -e$, $q_p = +e$, $q_n = 0$

Ladungsquantisierung: Ladung immer nur Vielfaches von e

$e = 1.60217 \cdot 10^{-19}\,C\ \ [Coulomb]$

Ladungserhaltung: Gesamtladung bleibt erhalten.

11.4. elektrostatische Wechselwirkung

$\vec{F_{12}} = K\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r_{12}}}{r_{12}}$
$K = 9 \cdot 10^9\,Nm^2/c^2$

Dielektrizitätskonstante des Vakuums ϵ_0
$K = \frac{1}{4\Pi\epsilon_0} \quad \leftrightarrow \quad \vec{F_{12}} = \frac{1}{4\Pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r_{12}}}{r_{12}}$
$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}C^2N^{-1}m^{-2}$

Die elektr. potentielle Energie

$E^e_{pot}(\vec{r}) = \frac{1}{4\Pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}$
selbe Vorzeichen: abstossen
unterschied. Vorzeichen: anziehen

11.5. Das klassische Atom-Modell

α-Teilchen: 2 Protonen, 2 Neutronen

Wasserstoff-Spektrum

$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2})$ Balmer-Rydberg-Formel
$R = 1.097 \cdot 10^7\,m^{-1}$
m,n: ganze Zahlen
m=2: Balmer-Serie, m=1: Lyman-Serie, m=3: Paschen-Serie
$f = \frac{c}{\lambda}$
Seriengrenze: $n = \infty \rightarrow \frac{1}{\lambda} = R\frac{1}{m^2}$

Energie eines Wasserstoffatoms

$E = \frac{1}{2}m_e\vec{v}_e^2 - \frac{1}{4\Pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$
$E(r) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4\Pi\epsilon_0})\frac{e^2}{r} - \frac{1}{4\Pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2}(\frac{1}{4\Pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r})$

Zustandsübergang (nach Bohr)

$f = \frac{1}{h}(E_n - E_m)$
oder: $\frac{1}{\lambda} = C(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2})$, $C = \frac{-E_1}{hc}$
h=Plancksche Konstante=6.63$\cdot$ 10^{-34}Js
E_n=Anfangszustand
E_m=Endzustand
$E_m < E_n$
$E = h\cdot f$ f= Freq. des emit. Lichts

Drehimpuls des Elektrons

$L = rp = rm_e v \equiv \frac{nh}{2\Pi} = n\hbar \quad n = 1, 2, 3, \ldots$
$\hbar = \frac{h}{2\pi} 1.05045\cdot 10^{-34}\ Js$

Bohrsche Radius:
für Elektron und Proton gilt:
$r = a_0 n^2 \quad a_0 = 5.292\cdot 10^{-11} m \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

sonst (z.Bsp Myon und Elektron)
$r = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2} n^2$
Energie im n-ten Zustand (allgemein):
$E_n = -\frac{1}{2}\frac{\mu e^4}{(4\Pi\epsilon_0)^2}\frac{1}{\hbar^2}\frac{1}{n^2}$
z.Bsp. $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p} \rightarrow \mu \approx m_e$

11.6. Bindungsenergie

innere Energie $U = E_{kin} + E_{pot}$
Bindungsenergie $E_B = -U$
$U > 0, E_B < 0$: System ist instabil
$U < 0, E_B > 0$: System ist stabil

Bindungsenergie der Kerne:
$E_B = \Delta mc^2 = (Z_{mH} - (A - Z)m_n - M_A)c^2$
Bindungsenergie pro Nukleon = $\frac{E_B}{A}$

Kernreaktionen

$n \rightarrow p + e^- + \nu$
$n \rightarrow p + e^- + \nu$
ν: Neutrino

Fusion zweier Protonen:
${}^1_1H +^1_1 H \rightarrow^2_1 H + e^+\nu + 0.42MeV$

11.7. Antimaterie

Antiteilchen:
$\bar{p}, \bar{n}, e^+$: Antiproton, Antineutron, Positron

Vernichtung:
$e^+ + e^- \rightarrow$ Licht(γ-Strahlen)
$E = 2m_e c^2$
Dasselbe gilt auch für Proton-Antiproton und Neutron-Antineutron.

12. Temperatur, Gase und das Konzept der Wärme

12.1. thermische Ausdehnung

$\Delta L = \alpha(T) L \Delta T$
$\alpha(T)$: lin. Ausdehnungskoeff.
L: urspr. Länge

12.2. Der Druck p

$p \equiv \frac{F}{A}$ $[\frac{N}{m^2} = 1\ Pascal]$
1 atm = 1.013$\cdot$ 10^5 Pa
1 bar = 10^5 Pa

$V = C_1 T$ bei konst. p
$p = C_2 T$ bei konst. Vol.

12.3. absolute Nullpunkt

$-273.16^o C$

Kelvin-Skala: $0K = 273.16^o C$

12.4. Wärmestrahlung

Stefan-Boltzmann-Gesetz:
$S(T) = \sigma T^4$ $[W/m^2]$
S(T): nach aussen ausgesandte, über alle Wellenlängen summierte Ausstrahlung
$\sigma = 5.670\cdot 10^{-8}$ $(W/m^2)/K^4$ für "idealen Strahler"

für "realen Körper"
$S(T) = \varepsilon\sigma T^4$
$\varepsilon = 1$ (Emissionsgrad) für schwarzen Körper, sonst < 1

Nettowärmestrahlung
$S_{netto} = S_{emittiert} - S_{absorbiert} = \varepsilon\sigma T^4 - \varepsilon\sigma T_0^4$
T_0: Umgebungstemperatur

Spektralverteilungsfkt. der Hohlraumstrahlung $S(\lambda, T)$
Wellenlängenabhängigkeit der Hohlraumstrahlung bei best. Temp.
$S(\lambda, T) d\lambda$ $S(\lambda, T) = \frac{[J]}{[s/m]^3}$
$S(T) = \int S(\lambda, T) d\lambda$

Wiensche Verschiebungsgesetz
$\lambda_{max} T = 2898 \mu mK$

Strahlungsgesetz von Planck
$S(\lambda,T) = \frac{2\Pi c^2 h}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$
k: Boltzmann-Konst. $\approx 1.381\cdot 10^{-23} J/K$

12.5. ideale Gase

$pV = Konst$ bei konst. Temp
$V = C_1 T$ bei konst. Druck
$p = C_2 T$ bei konst. Vol
$C_p = C_v + nR$

Zustandsgeleichung des idealen Gases

$$pV = NkT = nRT$$

N: Anz. Gasmoleküle
k: Boltzmann-Konst $[\frac{J}{K}]$
n: Mol eines Gases
$R \equiv N_A k = 8.314\ J/mol/K$

Standardbedingungen:
$T = 0 \circ C = 273.15\ K$
$p = 1\ atm = 1.01325\cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$

1 Mol eines Gases hat folgendes Volumen:
$V = \frac{nRT}{p} = 22.4\ l$

12.6. Mikroskopische Betrachtung der Materie

Mittlere kin. Energie des Gases:
$pV = \frac{2}{3}N\langle E_{kin}\rangle$
$\langle E_{kin}\rangle = \frac{3}{2}kT$ für ein Gasmolekül
$\langle E_{kin}\rangle = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}nRT$ für alle Gasmoleküle (N=Anz. Moleküle)

12.7. Wärmeenergie und -kapazität

$C \equiv \frac{\Delta Q}{\Delta T}\ [\frac{J}{K}]$
ΔQ: Energie(Wärme) um Körper um ΔT zu erhöhen.

bei konst. P:
$C_P \equiv \frac{\Delta Q}{\Delta T}$

bei konst. V:
$C_V \equiv \frac{\Delta Q}{\Delta T}$

pro Mol:
$c \equiv \frac{\Delta Q}{n\Delta T}\ [J/mol/K]$

pro Masse:
$c \equiv \frac{\Delta Q}{m\Delta T}\ [J/g/K]$

Wärmekapazität eines einatomigen idealen Gases
Energie
$U = N\langle E_{kin}\rangle + 0 = N(\frac{3}{2}kT)$
$C_V = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U_{ideal}}{\Delta T} = \frac{d}{dT}(\frac{3}{2}NkT) = \frac{3}{2}Nk \approx 12.5$ bei idealem Gas

Dulong-Petitsche Regel

Wärmekapazität von Festkörpern
$C_V \approx 25\ J/mol/K$
$C_{Festkoerper} = 3RJ/mol/K$

12.8. Latente Wärme

$Q = LM$
benötigte Wärme Q, um Phasenübergang (flüssig, fest, Gas) zu machen, ist zu L (=latente Wärme) proportional.

Äquipartitionstheorem
jeder Freiheitsgrad eine mittlere Energie von $(\frac{1}{2})kT$ pro Molekül $((\frac{1}{2}RT)$ pro Mol)
innere Energie
$U = f(\frac{1}{2}nRT)$
f: Freiheitsgrade
n: Anz. Mole
Bei zwei-atomiger Schwingung: 2 Freiheitsgrade!

$C_V = f(\frac{1}{2}R)$
Freiheitsgrade von Festkörpern
$C_V \approx 25\ J/mol/K = f(\frac{1}{2}R) \Leftrightarrow f = 6$

13. Thermodynamik

13.1. Definition der inneren Energie

$U = U(p, V, T, \ldots)$

$\Delta U \equiv U_E - U_A$

13.2. Der erste Hauptsatz

Die innere Energie U eines Körpers kann sowohl durch Zufuhr von Wärme als auch durch Leistung von mech. Arbeit verändert werden (drückt eine Energieerhaltung aus)

$\Delta U \equiv U_E - U_A$ Änderung der inneren Energie
$dU = dQ + dW$
du = (infinitesimale) Änderung der inneren Energie U
dQ = zugeführte Wärme
dW = vom Körper geleistete mech. Arbeit

13.3. Mechanische Arbeit eines expandierenden Gases

Aus $dW = -Fdx = -(pA)dx$ folgt:
$dW = -pdV$

13.4. Die Wärmekapazitäten C_V und C_P

1. *Wärmezufuhr bei konst. Volumen*
   Wird einem Gas bei konst. Volumen eine Wärme dQ_V zugeführt, so tritt keine mechanische Volumenarbeit $-pdV$ auf, d.h.
   $$dW = -pdV = 0$$
   Die ganze Wärme dQ_V wird benutzt um die Temperatur des Gases zu erhöhen. Es folgt, dass die Wärme dQ_V gleich der Änderung der inneren Energie U ist.
   $$dU = dQ + dW \;\Rightarrow\; dU = dQ_V$$
   Man schreibt
   $$dQ_V = dU = C_V dT$$
2. *Wärmezufuhr bei konst. Druck*
   Wenn wir dem Gas bei konstantem Druck Wärme zuführen, dehnt sich das Gas aus, und deshalb wird das Gas eine Arbeit $-pdV$ leisten. Eine Konsequenz ist, dass nur ein Teil der zugeführten Energie zur Erhöhung der inneren Energie benutzt werden kann.
   Um dieselbe Temperaturerhöhung wie bei konst. Volumen zu bewirken, muss bei konst. Druck mehr Energie zugeführt werden, d.h.
   $$C_p > C_V$$
   Die Wärmekapazität bei konst. Druck wird definiert als:
   $$dQ_P = C_P dT$$
   Wegen der Energieerhaltung muss die Erhöhung der inneren Energie dU gleich der Summe der zugeführten Wärmeenergie dQ_p und der vom Gas geleisteten mech. Arbeit sein
   $$dQ_P + dW = dU \;\Rightarrow\; dQ_P = dU + pdV$$
   Es folgt:
   $$C_P dT = C_V dT + pdV$$
   Für ein ideales Gas folgt: $C_P = C_V + nR$

13.5. Thermische Prozesse des idealen Gases

1. **Isobare Zustandsänderung**
   Bei isobaren Zustandsänderungen wird der Druck p konstant gehalten.
   $W = -p\int_{V_a}^{V_e} dV = -p(V_e - V_a)$
2. **Isotherme Ausdehnung** und Umwandlung von Wärme in mech. Arbeit
   Die Temperatur T des Gases wird in einer isothermen Expansion konstant gehalten.
   Um die Temperatur des Gases während der Expansion konstant zu halten, müssen wir gleichzeitig Wärme zuführen.
   Da die innere Energie des idealen Gases nur von der Temperatur abhängt, folgt
   $T = Konst \Rightarrow U \equiv U(T) = Konst \Rightarrow dU = 0$
   und mit der Energieerhaltung
   $dU = dQ + dW = 0 \Rightarrow dQ = -dW$
   Die gesamte zugeführte Wärme ist gleich:
   $Q = \int dQ = -\int dW = -W = \int_{V_1}^{V_2} pdV = nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = nRT\ln(\frac{V_2}{V_1})$
3. **Adiabatische Ausdehnung**
   Während der adiabatischen Ausdehnung des Gases wird keine Wärme ausgetauscht.
   $$dQ \equiv 0$$
   Weil das Gas keine Wärme aufnehmen oder abgeben kann, ist die geleistete Arbeit gleich der Abnahme der inneren Energie U:
   $dU = dW \;\Rightarrow\; \Delta U = \int dW = W$
   Bei der adiabatischen Expansion wird die Wärmeenergie, die im Gas gespeichert ist, in mech. Arbeit umgewandelt.
   Wir definieren den Koeffizienten γ:
   $\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V}$
   $TV^{\gamma-1} = Konst$
   $pV^{\gamma} = Konst$
   $W = \frac{R}{\gamma-1}(T_E - T_A) = C_V(T_E - T_A)$

13.6. Wärmemaschine

$Q_{isotherm} = -W_{isotherm} = nRT\ln(\frac{V_2}{V_1})$

Eine Maschine, die Wärme in mechanische Arbeit umwandelt, heisst eine Wärmemaschine.

In einer **Wärmemaschine** nimmt diese Substanz bei der höheren Temperatur T_W die Wärme Q_W auf, verrichtet eine Arbeit W und gibt bei der tieferen Temperatur T_K die Wärme Q_K ab.

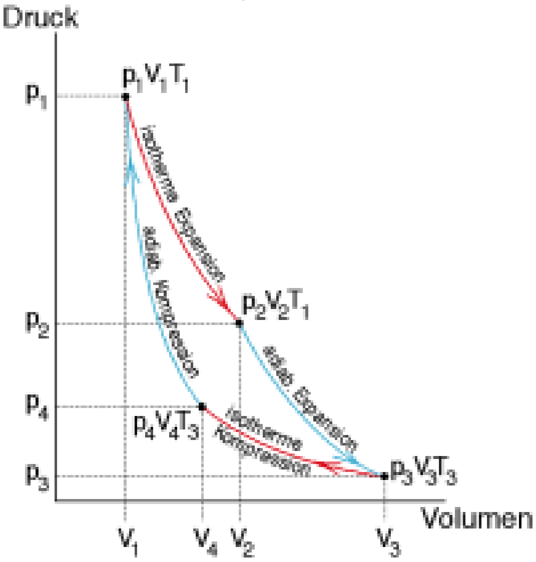
Eine **Wärmepumpe** ist eine Wärmemaschine mit umgekehrter Arbeitsrichtung: die Substanz nimmt bei der tieferen Temperatur T_K eine Wärme Q_K auf, und gibt unter Ausnutzung der Arbeit W die Wärme

Q_W an das wärmere Reservoir der Temperatur T_W ab.

13.7. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik

Der Carnotsche Kreisprozess

Carnot hat gefunden, dass es eine (theoretische) Wärmemaschine gibt, deren Wirkungsgrad nur von der Temperatur der Wärmereservoirs abhängt und dass dieser Wirkungsgrad für gegebene Temperaturen der maximal mögliche ist.



Der Wirkungsgrad einer Wärmemaschine ist definiert als Verhältnis der geleisteten Arbeit und der zugeführten Wärme
$\epsilon = \frac{|W|}{|Q_W|} = \frac{|Q_W|-|Q_K|}{|Q_W|} = 1 - \frac{|Q_K|}{|Q_W|}$

Bei einer Wärmepumpe ist der Wirkungsgrad wie folgt def:
$c_L = \frac{Q_K}{W}$

Der Wirkungsgrad der Carnotschen Wärmemaschine
$\frac{Q_W}{Q_K} = \frac{T_1 \ln(V_2/V_1)}{T_3 \ln(V_4/V_3)} = -\frac{T_1 \ln(V_2/V_1)}{T_3 \ln(V_3/V_4)} = -\frac{T_1}{T_3}$
Der Wirkungsgrad der Wärmemaschine von Carnot ist dann gleich
$\epsilon_{Carnot} = \frac{|W|}{|Q_W|} = 1 - \frac{|Q_K|}{|Q_W|} = 1 - \frac{T_3}{T_1}$

Der Wirkungsgrad aller zwischen zwei Temperaturen reversibel arbeitenden Wärmemaschinen ist gelich gross, und alle irreversiblen Wärmemaschinen haben einen kleineren Wirkungsgrad.
$\epsilon_{reale} < \epsilon_{Carnot} = 1 - \frac{T_3}{T_1} < 1$

Konzept der Irreversibilität

Ein irreversibler Prozess ist ein Prozess, der nicht in umgekehrter Reihenfolge ablaufen kann.

Ein Stück Eis wird in eine Tasse mit Wasser eingetaucht. Das Eis schmilzt. Die Temperatur des Wassers in der Tasse sinkt. Ein solcher Prozess ist irreversibel. Es gibt nur eine Richtung für den Vorgang.

Der Prozess der freien Expansion wird als nicht reversibel bezeichnet, weil die W'keit, dass alle Gasmoleküle sich zu einer späteren Zeit wieder im ersten Volumen befinden ist extrem klein.

14. Relativität

14.1. Transformation von einem Bezugssystem ins andere

$t = t'$
$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{v}'(t)$
$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \vec{a}(t)$

14.2. Inertialsysteme

Wenn die zwei Beobachter eine unterschiedliche Beschleunigung messen, kann das zweite Newtonsche Gesetz nicht für beide Beobachter gelten (wenn sie beide dieselbe Kraft messen)

Ein Bezugssystem, in dem die Newtonschen Gesetze gelten, heisst Inertialsystem.

Verschiedene Inertialsysteme bewegen sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit.

14.3. Rotierendes Bezugssystem

Winkelgeschwindigkeit:
$\omega(t) \equiv \frac{d\Theta(t)}{dt}$

Zentrifugalkraft

$F_{Zentrifugal} \equiv \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$

Corioliskraft

$a_{Coriolis=2\omega v}$

$\omega_x = \omega_E \cdot \sin(\phi_X)$
ω_X: Winkelgeschwindigkeit mir der sich Laborsystem in X (mit geog. Breite ϕ_X) dreht.

14.4. Die Galileische Transformation

O' bewegt sich mit Geschw. V in x-Richtung relativ zu O. $x' = x - Vt$
$y' = y$
$z' = z$
$t' = t\ x' = x - Vt$

Geschwindigkeitsparameter β:
$\beta \equiv \frac{V}{c}$

inverse Galileische Transformation von O' nach O:
$x = x' + Vt' = x' + \beta ct'$
$y = y'$
$z = z'$
$t = t'$

14.5. Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit

$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \ m/s$

Jeder Beobachter misst in allen Richtungen für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum denselben Wert c.

D.h. die Lichtgeschwindigkeit ist gleich in alle Richtungen und unabhängig von der Bewegung des Beobachters.

14.6. Die Lorentz-Transformation

Die Galileische Transformation entspricht einer Näherung, die nur gilt, wenn die Geschw. viel kleiner als die Lichtgeschw. sind.

Lorentz-Faktor:
$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \ \ \beta = \frac{v}{c}$

Lorentz-Transformation:
$x' = \gamma(x - \beta ct)$
$y' = y$
$z' = z$
$ct' = \gamma(ct - \beta x)$
x: Strecke in x-Richtung die zurückgelegt (+/-) beachten.

14.7. spezielle Relativitätstheorie

Prinzip der Relativität:
Man kann eine gradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit nicht fühlen.

Raumzeitintervall Δs

$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$
Die Raumzeit ist für alle Beobachter gleich.

$\Delta s = c \cdot \Delta \tau$ $\Delta \tau$: Eigenzeitintervall

Eigenzeit und Zeitdilatation

Die zeitliche Entfernung zwischen zwei Ereignissen, die bezüglich einem Bezugssystem am selben Ort stattfinden, heisst Eigenzeitintervall $\Delta \tau$.
$\Delta t'$ bzgl. O' gemessene Zeit, $\Delta \tau$ bzgl. O gemessene Zeit

$\Delta t' = \gamma \Delta \tau$

Längenkontraktion

Die räumliche Entfernung zwischen zwei Punkten (oder die Länge eines Gegenstandes) erscheint geringer, wenn sich der Beobachter relativ zu diesen Punkten bewegt als wenn er relativ zu ihnen ruht.
$\Delta x'$ bzgl. O' gemessene Länge, $\Delta \lambda$ bzgl. O gemessene Länge
$\Delta x' = \frac{\Delta \lambda}{\gamma}$

Gleichzeitigkeit

Werden zwei Uhren in ihrem Ruhesystem synchronisiert, so sind sie in keinem anderen Bezugssystem synchron. In dem Bezugssystem, in dem die Uhren sich bewegen, geht die führende Uhr um einen Betrag

$$\Delta t_s = l_R \frac{v}{c^2}$$

vor (zeigt eine spätere Zeit an), wobei l_R der Ruheabstand der Uhren ist.

14.8. Der Raumzeit 4-Vektor

$x^\mu \equiv (ct, x, y, z)$

14.9. Der relativistische Energie-Impuls Vektor

Energie-Impuls 4-Vektor:
$p^\mu \equiv (E, \vec{p}c)$
$E' = \gamma m_0 c^2$
$cp'_x = -\gamma m_0 \beta c^2$
$cp'_y = cp_y$
$cp'_z = cp_z$

Ruhemasse als Invariante der Lorentz-Transformation
$E^2 = (m_0 c^2)^2 + (\vec{p}c)^2$

Energie-Impulserhaltung:
$P^\mu = \sum_i p_i^\mu$
Dieser Gesamt-Energie-Impuls 4-Vektor wird erhalten, falls das System isoliert ist.

14.10. Die Rot- und Blauverschiebung des Lichts

Blauverschiebung
Wenn sich die Quelle in Richtung des Beobachters bewegt, wir die vom Beobachter gemessene Wellenlänge kleiner als sie im Quellensystem erscheint.

D.h., das Verhältnis der Frequenzen ist gleich:
$\frac{\nu}{\nu'} = \frac{\lambda'}{\lambda} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \geq 1$

Rotverschiebung
Im Fall einer sich vom Beobachter wegbewegenden Quelle finden wir $\beta \to -\beta$
$\frac{\nu}{\nu'} = \frac{\lambda'}{\lambda} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \leq 1$

Hubble-Gesetz
$v = Hr$
v Geschw. relativ zur Erde, r die Entfernung von der Erde, und H die Hubble-Konstante
$H = 72 \pm 8(km/s)/Mpc$

15. Elektromagnetismus

15.1. Elektr. und magnetische Felder

Das elektrische Feld

Wenn wir eine Punktladung Q und, in einem bestimmten Abstand r von ihr, eine Punktladung q betrachten, so übt die Punktladung Q eine Kraft auf die Punktladung q aus. Sie wirkt entlang der Verbindungslinie zwischen q und Q.
Die elektr. Kraft, die die Ladung Q auf eine Ladung q ausübt, ist gleich

$$\vec{F} = \frac{1}{4\Pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Wir definieren das elektr. Feld der Punktladung Q als

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\Pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Die Lorentz-Kraft

Die allgemeine elektromagnetische Kraft wird als Funktion zweier Vektorfelder, des elektr. und des magnetischen Feldes ausgedrückt.

$$\vec{F} \equiv \vec{F}_E + \vec{F}_B = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

wobei E das elektr. Feld und B das magnetische Feld

$$F_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$F_L = I\vec{l} \times \vec{B}$$

Wir bemerken, dass

1. eine Punktladung ein elektr. Feld E in jedem Punkt des Weltraums um sie erzeugt. Das elektr. Feld übt die elektr. Kraft qE auf eine zweite Ladung q an deren Ort aus.

2. eine bewegte Punktladung ein magnetisches Feld B in jedem Punkt des Weltraums erzeugt. Das magnetische Feld übt die magnetische Kraft $qv \times B$ auf eine zweite bewegte Ladung q aus.

Einheiten:
$[\vec{E}] = \frac{N}{C}$
$[\vec{V}] = T \;\; 1T = 10^4 G$

Magnetische Kraft
Wir bemerken, dass

1. Die Kraft proportional zur Geschw. ist. Auf ein ruhendes Teilchen wirkt keine magnetische Kraft.

2. Die Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung und zur Richtung des Feldes wirkt.

3. Der Betrag der magnetischen Kraft ist gleich $|\vec{F}_B| = |q||\vec{v}||\vec{B}| \sin\alpha$ (Lorentzkraft)

15.2. Feldlinien

elektr. Feldlinien

Die Feldlinien folgen in allen Punkten des Raumes der Richtung des Feldes.

Regeln für die elektr. Feldlinien:

1. Die elektr. Feldlinien beginnen bei positiven Ladungen und enden bei negativen Ladungen oder im Unendlichen.

2. Um einen einzelne Punktladung sind die Feldlinien kugelsymmetrisch verteilt.

3. Die Anzahl der Feldlinien um eine Punktladung ist zur Grösse der Ladung proportional.

Magnetische Feldlinien

Es gibt keine Punkte im Raum, an denen die magnetischen Feldlinien anfangen oder enden. Deshalb bilden die magnetischen Feldlinien geschlossene Schleifen.

Die Feldlinien zeigen immer von N nach S.

Die Wechselwirkung zwischen gleichen Magnetpolen ist abstossend, die zwischen ungleichen Polen anziehend.

15.3. Elektr. potentielle Energie und elektr. Potential

Wir betrachten zwei Ladungen q und Q im Abstand r voneinander, die elektr. pot. Energie ist gleich:

$$E^e_{pot}(\vec{r}) = \frac{1}{4\Pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r}$$

Das elektr. Potential wird definiert als:

$$V(\vec{r}) \equiv \frac{E^e_{pot}(\vec{r})}{q}$$

Wir können daher den elektr. Potentialunterschied zwischen zwei Punkten als die Arbeit definieren, die ein elektr. Feld leistet, wenn es eine Einheitsladung von einem Punkt zu einem anderen bewegt.

Potentialdifferenz

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta E_{pot}}{q} = \int_a^b E dl$$

Kinetische Energie, die eine Ladung q gewinnt, wenn sie durch eine Potentialdifferenz ΔV beschleunigt wird: $\Delta E_{kin} = |q\Delta V|$

Einheit:
$[V] = J/C = V$

Kontinuierliche Ladungsverteilung

$$V = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r}$$

Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung findet man das Potential durch Integration über die Ladungsverteilung.

Der Gradient des Potentials

Das elektr. Feld ist der negative Gradient des elektr. Potentials:
$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$
Einheit des elektr. Feldes:
$[\vec{E}] = N/C = V/m$

elektr. Potential des elektr. Dipols

$V(r) \approx \frac{q}{4\Pi\epsilon_0}(\frac{a\cos\theta}{r^2})$

elektr. Spannung

$U_{AB} \equiv V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_B)$

15.4. Elektr. Strom

$I(t) \equiv \frac{dQ}{dt}$
wobei dQ die Ladungsmenge ist, die in der Zeit dt durch die Fläche A tritt. Man benutzt die historische Konvention, dass die positive Stromrichtung der Flussrichtung der positiven Ladungen folgt.
Einheit $1A = 1C/s$

Driftgeschw. v_D, bei Dichte der beweglichen Ladungsträger gleich n: $I\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{qn(Av_D\Delta t)}{\Delta t} = qnAv_D$

Die Stromdichte und die Leitfähigkeit

Stromdichte j:
$j = \frac{I}{A} = \sigma E$
wobei σ die Leitfähigkeit des Leiters ist. Die Stromdichte ist zum elektr. Feld proportional.
Einheit: $[\sigma] = \frac{A}{Vm}$
Ohm $\Omega = \frac{V}{A}$

Das Ohmsche Gesetz

$U = RI = (\frac{L}{\sigma A}I)$
R: Widerstand des Leiters, L: Länge

Die elektr. Leistung

$P = UI = RI^2$

Spezifischer Widerstand

$R = \rho\frac{l}{A}$

15.5. Berechnung der elektr. und magnetischen Felder

Raumladungsdichte ρ:
$\rho(\vec{r}) \equiv \frac{dq}{dV}$
Flächenladungsdichte σ:
$\sigma \equiv \frac{dq}{dA}$
Linienladungsdichte λ:
$\lambda \equiv \frac{dq}{dl}$

Berechnung des E-Feldes

Coulomb-Gesetz:
Eine Punktladung dq erzeugt ein elektr. Feld in einem bestimmten Punkt r gleich
$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\Pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^3}\vec{r}$
Wobei sich die Ladung im Ursprung des Koordinatensystems befindet.
Wenn sich die Ladung in einem Punkt r' befindet, dann ist das E-Feld gleich:
$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\Pi\epsilon_0}\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r} - \vec{r}')$

Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung ($dq = \rho dV$), gilt:
$\vec{E}(\vec{r}) = \int\int\int \frac{1}{4\Pi\epsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r} - \vec{r}')d^3\vec{r}'$

Für einen unendlichen Stab gilt:
$| \vec{E} |= \frac{2\lambda}{4\Pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$

Berechnung des B-Feldes (Bio-Savart)

Eine Punktladung q, die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, erzeugt im Raum ein Magnetfeld B, das gegeben ist durch

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \times r/r}{r^2}$$

Das Feld in einem Punkt r ist gleich:
$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\Pi} \frac{dq}{r^2} (\vec{v} \times \frac{\vec{r}}{r})$

Das Feld das durch das Stromelement Idl erzeugt wird, ist gleich $(dq)\vec{v} = (\frac{dq}{dt})(\vec{v}dt) = Id\vec{l}$
$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\Pi} \frac{I}{r^2} (d\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r})$

$\vec{B}(\vec{r}) = \int d\vec{B}$

15.6. Bewegte Ladungen in elektr. und magnetischen Feldern

Bewegung einer Punktladung in einem elektr. Feld

$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$
oft müssen wir die relativistische Masse benutzen:
$\vec{a} = \frac{q}{\gamma m_0}\vec{E}$

Bewegung einer Punktladung in einem magnetischen Feld

Zyklotron:
$\omega = \frac{qB}{\gamma m_0}$
$T = \frac{2\Pi}{\omega} = \frac{2\Pi\gamma m_0}{qB}$
$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\Pi\gamma m_0}$

15.7. Kraft auf einen elektr. Strom

Ein elektr. Strom besteht aus einer Ansammlung sich bewegender Ladungen. Wir erwarten daher, dass ein Magnetfeld auch auf einen Leiter durch den ein Strom fliesst, eine Ablenkungskraft ausübt. Die Gesamtkraft auf einen Leiter der Querschnittsfläche A und Länge L ist.
$\vec{F} = L\vec{I} \times \vec{B}$

für ein differentielles Element des Stroms:
$d\vec{F} = Ld\vec{I} \times \vec{B} = Id\vec{L} \times \vec{B}$

15.8. Der Fluss und die Divergenz des Flusses

Der Fluss $d\phi$ eines Vektorfeldes F durch eine infinitesimale Fläche dA wird definiert als (der Fluss ist eine Skalargrösse):

$$d\phi \equiv \vec{F} \cdot d\vec{A} =| \vec{F} || d\vec{A} | \cos\theta$$

wobei dA ein Vektor ist, der dem infintesimalen Flächenelement dA entspricht.

Für eine endliche Fläche von beliebiger Form wird der Fluss durch Integration der infintesimalen ebenen Flächenelemente gewonnen. Der gesamte Fluss durch die Oberfläche A ist deshalb gleich

$$\phi \equiv \iint_A \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

(Integration über die Fläche A)

Häufig sind wir am Fluss durch eine *geschlossene* Oberfläche interessiert. Definitionsgemäss zeigen in diesem Fall die infinitesimalen Flächen dA an jedem Punkt der Oberfläche nach aussen.

$$\phi \equiv \oiint_{geschlossene\ A} \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

Der elektr. und magnetische Fluss

$\phi_E \equiv \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$ (Elektr. Fluss)
$\phi_B \equiv \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$ (Magn. Fluss)

Die Divergenz des Feldes

Die Divergenz des Feldes in jedem Punkt (x,y,z) ist gleich dem Fluss, der das Volumenelement im Punkt (x,y,z) des Volumens dxdydz verlässt pro Volumeneinheit.
$d\phi_{tot}(x, y, z) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z))dxdydz$
wobei wir den Nabla-Operator für die Divergenz des Feldes im Punkt (x,y,z) verwendet haben.
$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) = (\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z})$

Theorem der Divergenz/ Theorem v. Gauss

Theorem der Divergenz für den gesamten Fluss ϕ_{tot} der ein Volumen V verlässt:

$$\phi_{tot} \equiv \oiint_{A=\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})dV$$

wobei A die Oberfläche ist, die das Volumen V umschliesst.

15.9. Das Gauss'sche Gesetz

Gesetz von Gauss für das elektr. Feld:
$\epsilon_0(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})) = \rho(\vec{r})$

Diese Beziehung zwischen der Divergenz des elektr. Feldes und der Ladungsdichte in jedem Punkt des Raumes entspricht einem fundamentalen Gesetz des Elektromagnetismus.

Es folgt daraus:
$\phi_{tot} \equiv \oiint\limits_{A=\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \iiint\limits_{V} (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})dV = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint\limits_{V} \rho(\vec{r})dV = \frac{Q_{innerhalb}}{\epsilon_0}$

15.10. Divergenz des magnetischen Feldes

Es wird nie magnetischer Fluss erzeugt oder vernichtet. Es gibt keine Punkte im Raum, an denen die magnetischen Feldlinien anfangen oder enden.

Die Divergenz des magnetischen Feldes muss deshalb in jedem Punkt des Raumes gleich null sein:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{r}) = 0$$

Gesetz von Gauss für das magnetische Feld

15.11. Stromdichte und Ladungserhaltung

Wenn die gesamte Ladung, die im Volumen V enthalten ist, sich ändert, muss ein Strom durch die Oberfläche des Volumens fliessen.
Die zeitliche Änderung der gesamten Ladung innerhalb des Volumens ist deshalb gleich dem Strom, der durch die Obefläche des Volumens fliesst:
$-\frac{dQ}{dt} = I(t)$
Wir verwenden nun die Stromdichte j(r), so dass die Summe der Stromdichte über eine endliche Fläche A gleich der gesamten Stromstärke ist, die durch die Fläche A fliesst:
$I \equiv \iint\limits_{A} \vec{j}(\vec{r})\cdot d\vec{A}$
Die Stromdichte ist die Stromstärke pro Flächeneinheit. Die Stromstärke durch eine ebene Fläche dA ist gleich
$i_A = \vec{j}\cdot d\vec{A}$
Einheit: $[\vec{j}] = \frac{A}{m^2}$

Kontinuitätsgleichung:
$\frac{\partial\rho(\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r}) = 0$
Diese Gleichung gilt in jedem Punkt des Raumes. Sie sagt, dass wenn sich die Ladung in einem Punkt ändert, in diesem Punkt ein elektr. Strom fliessen muss.

15.12. Das Linienintegral eines Feldes

Theorem von Stokes

$\oint\limits_{C=\partial A} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint\limits_{A} (\vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{A})$

Wenn die Rotation des Feldes in jedem Punkt des Raumes verschwindet, ist das Linienintegral vom Punkt A zum Punkt B unabhängig vom Weg. In diesem Fall ist das Feld **konservativ** (oder ein Potentialfeld).

15.13. Das Ampersche Gesetz

$\oint\limits_{C} \vec{B}d\vec{r} = \mu_0 I_C$
Wobei I_C der Strom ist, der durch die Fläche hindurchtritt, die durch die Kurve begrenzt wird.

Es muss in jedem Punkt des Raumes gelten:
$(\vec{\nabla}\times\vec{B})(\vec{r}) = \mu_0\vec{j}(\vec{r})$
Gesetz von Ampere für das magnetische Feld
Wobei $j(r)$ die Stromdichte und μ_0 die magnetische Feldkonstante ist.

15.14. Maxwellsche Gleichungen

Die Maxwellschen Gleichungen fassen in einer kompakten mathematischen Formulierung die beiden Gesetze von Gauss für das elektr. und magnetische Feld sowie die Gesetze von Ampere zusammen.
Zusätzlich wurden auch das sogenannte Gesetz von Faraday und eine Erweiterung des Gesetzes von Ampere, die mit der zeitlichen Änderung der Felder zu tun hat, von Maxwell hinzugefügt.

$\epsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = \rho$
$(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) = 0$
$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Im Fall der Elektrostatik und Megnetostatik sind die Felder von der Zeit unabhängig, und die Gleichungen vereinfachen sich zu:

$\epsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = \rho$
$(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) = 0$
$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$
$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

Aus den ursprünglichen zeitabhängigen Gleichungen folgt eine wichtige physikalische Regel:
Ein zeitveränderliches magnetisches (bzw. elektr.) Feld erzeugt ein elektr. (bzw. magnetisches) Feld.

15.15. Gesetz von Faraday (Induktionsgesetz)

$U_{induziert} = \oint\limits_{C=\partial A} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\iint\limits_{A} \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\frac{d\phi_B}{dt}$
wobei ϕ_B der magnetische Fluss durch die Fläche A ist, und C die Kurve, die die Fläche A einschliesst.

Wenn die Leiterschleife einen geschlossenen Stromkreis bildet, werden sich die beweglichen Elektronen in der Schleife bewegen. Man spricht von induziertem Strom. Im Falle von Metallen kann man das

Ohmsche Gesetz benutzen:
$I_{induziert} = U_{induziert}/R = -\frac{1}{R}\frac{d\phi_B}{dt}$

Lenzsche Regel:
die induzierten Ströme sind so gerichtet, dass sie ihrer Ursache, d.h. der Änderung des magnetischen Flusses entgegenwirken.

16. Elektromagnetische Wellen

16.1. Felder eines bewegten geladenen Drahtes

$|\vec{B}| = (\epsilon_0\mu_0 v)|\vec{E}| = (\epsilon_0\frac{1}{\epsilon_0 c^2}v)|\vec{E}| = (\frac{v}{c^2}|\vec{E}|)$

16.2. Die elektromagnetischen Wellen

Im Allgemeinen werden elektromagnetische Wellen erzeugt, wenn geladene Teilchen beschleunigt werden.

Wellengleichung und Ausbreitungsgeschw.

Laplace-Operator:
$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Wellengleichung der elektromagnetischen Wellen:
$\vec{\nabla}^2\vec{E} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ und $\vec{\nabla}^2\vec{B}) = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$
Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist gleich c.

Die Beziehung zwischen den Beträgen der Felder ist die folgende:
$|\vec{B}| = (\frac{v}{c^2})|\vec{E}| = \frac{1}{c}|\vec{E}|$ oder $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$

Für eine elektromagnetische Welle im Vakuum (Luft) gilt

- $|\vec{E}| = c|\vec{B}| \to B_0 = \frac{1}{c}E_0$
- $\vec{E} \perp \vec{B}$
- $\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{v}$ (Ausbreitungsrichtung)
  $\vec{E} \times \vec{B}$ zeigt in Ausbreitungsrichtung
  $\to$ $\vec{E}, \vec{B}, \vec{v}$ bilden ein Rechtssystem
- wegen $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$ schwingen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in Phase
  z.B. ist für $E_x = E_y = 0, E_z = E_0\sin(ky - \omega t)$ und Bewegungsrichtung y-Achse
  $B_y = B_z = 0\ B_x = B_0\sin(ky - \omega t),\ B_0 = \frac{1}{c}E_0$

16.3. Ebene Wellen

Harmonische

$\vec{k} \equiv (k_x, k_y, k_z) = Wellenvektor$

Die Felder einer ebenen, elektromagnetischen Welle werden dann geschrieben als:
$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$
$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$
wobei E_0 und B_0die Amplitudenvektoren sind. Sie besitzen einen Betrag und eine Richtung, die der Polarisation der Welle entspricht.
$\omega =| \vec{k} | c$
Wellenzahl $|k| = \frac{2\pi}{\lambda}$

Die Felder müssen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung sein:
$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = \vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}_0$ und $\vec{k} \perp \vec{B}_0$

Und mit Hilfe der Maxwellschen Gl. gilt:
$\vec{B} = (\vec{k} \times \vec{E}_0)\frac{1}{\omega}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) = \frac{1}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E})$

16.4. Das elekromagnetische Spektrum

$c = \lambda\nu$
$E = h\nu$

16.5. Die Polarisation

Wir definieren die Polarisation der Welle als die Richtung des elektrischen Feldes.

Der Polarisator: es gibt bestimmte Platten aus einem polarisierenden Material, die nur die Wellen hindurchlassen, deren Polarisation parallel zu einer bestimmten Transmissionsrichtung sind. Die Wellen, die senkrecht zu dieser Richtung polarisiert sind, werden von der Platte absorbiert.

Gesetz von Malus:
Wenn der Winkel zwischen den Transmissionsrichtungen gleich θ ist, ist die Intensität der durchgelassenen Welle
$I = I_0\cos^2\theta$
wobei I_0 das Maximum der hindurchgelassenen Intensität ist.

16.6. Energie und Impuls der elektromagnetischen Wellen

Energiestromdichte (od. Leistungsdichte) der Welle:
Einheit: $\frac{W}{m^2}$

Poynting-Vektor

$\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$
Dieser Vektor zeigt in die Richtung, in die Energie transportiert wird.
$[\vec{S}] = \frac{J}{m^3}\frac{m}{s}$

Für eine harmonische Welle gilt:
$I = \frac{1}{2\mu_0 c}E_0^2 = \frac{\epsilon_0}{2}E_0^2 c\ [\frac{Watt}{m^2}]$

Intensität als Funktion der Distanz

Ein Beobachter befindet sich in einer Entfernung r von einer Punktquelle der Energie pro Zeiteinheit (= Strahlungsleistung) P_0.

$E_0 = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{P_0 \mu_0 c}{2\Pi}}$ und $B_0 = E_0/c$

Elektromagnetischer Druck

Wir betrachten eine elektromagnetische Welle, die auf eine Fläche fällt und vollständig absorbiert wird. Wir nehmen an, dass die absorbierte Energie (während einem Zeitintervall) gleich E ist.
$p_{em-Druck} = \frac{E}{c}$
$E = I \cdot t \cdot A \rightarrow \langle F \rangle = \frac{P}{t}$
$[p] = [Impuls] = kg \cdot \frac{m}{s}$
Wird die Welle vollständig von der Fläche reflektiert, so ist der übertragene Impuls doppelt so gross:
$p_{em-Druck} = \frac{2E}{c}$

Leistung

$P = A \cdot I$

16.7. Wellentheorie der elektromagnetischen Wellen

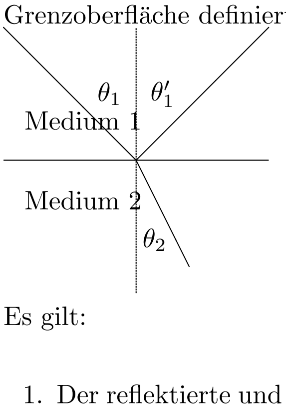
Prinzip von Huygens

Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Ausgangspunkt für eine kugelförmige Elementarwelle betrachtet werden.

Reflexion und Brechung

Fällt ein Lichtstrahl auf eine Oberfläche, so wird er dort sowohl reflektiert als auch gebrochen.

Der Einfallwinkel θ_1, der Reflexionswinkel θ_1' und der Brechungswinkel θ_2 werden relativ zur Normalen der Grenzoberfläche definiert.



Es gilt:

1. Der reflektierte und der gebrochene Strahl liegen in der vom einfallenden Strahl und der Normale der Grenzfläche gebildeten Ebene.
2. Reflexionsgesetz:
   $\theta_1 = \theta_1'$
3. Brechungsgesetz:
   $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = n_{21}$
4. $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

Wobei n_{21} die Brechzahl des Mediums 2 gegen das Medium 1 ist.

Totalrefelxion

Für Einfallswinkel grösser als dieser Grenzwinkel θ_g existiert kein gebrochener Strahl mehr.
$\frac{\sin\theta_g}{\sin 90} = \sin\theta_g = \frac{n_2}{n_1}$ mit $n_2 > n_1$

Beugung an einem Spalt

Wir betrachten eine ebene Welle der Wellenlänge λ, die auf einen Spalt mit der Breite a fällt. $a \approx \lambda$
Nach dem Prinzip von Huygens wirkt jeder Punkt des Spaltes als eine Quelle einer sich ausbreitenden Elementarwelle. Weil die Breite des Spaltes ungefähr so gross wie die Wellenlänge ist, entspricht der Spalt einer einzelnen Quelle.
Es folgt daraus, dass die ebene Welle die auf den Spalt fällt, sich nachher als konzentrische Kreise ausbreiten wird.

Ausbreitung des Lichtes durch einen Einzelspalt

Erstes Minimum:
$\frac{a}{2}\sin\theta = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow a\sin\theta = \lambda$

Kein Minimum, falls $a \ll \lambda$, da $\sin\theta = \frac{\lambda}{a} \rightarrow \infty$

Beugung verschwindet, falls $a \gg \lambda$

Beugung am Doppelspalt

d: Abstand zw. den Spalten
Δx: Gangunterschied

$\Delta x = \frac{2\Pi n}{k} = n\lambda \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$

Damit im Punkt P ein Maximum der Intensität entsteht, muss gelten:
$\Delta x = d\sin\theta = n\lambda \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$

und für Minima:
$\Delta x = d\sin\theta = (n + \frac{1}{2})\lambda \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$

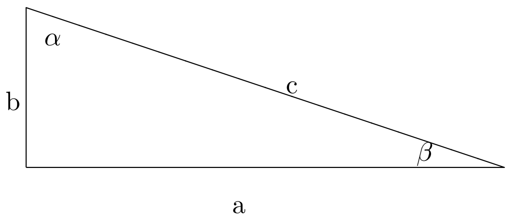
16.8. Röntgenbeugung

Licht fällt auf die Oberfläche eines Kristalls. Das Gitter soll eine kubische Symmetrie aufweisen.
a: Abst. zw. 2 benachbarten Atomen
Es gilt: $\theta_{einfallende} = \phi_{gebeugte}$

A. Physikalische Konstanten

Gravitationskonstante	G	$6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$
Lichtgeschwindigkeit	c	$3 \cdot 10^{8}\ \frac{m}{s}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$4\Pi \cdot 10^{-7}\ \frac{Vs}{Am}$
Elektr. Feldkonstante	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854 \cdot 10^{-12}\ \frac{As}{Vm}$
Elementarladung	e	$1.602 \cdot 10^{-19}\ C$
Plancksches Wirkungsquant.	h	$6.602 \cdot 10^{-34}\ Js$
	$\hbar = h/2\Pi$	$1.0546 \cdot 10^{-34}\ Js$
Ruhemasse Elektron	m_e	$9.109 \cdot 10^{-31}\ kg$
Ruhemasse Proton	m_p	$1.6726 \cdot 10^{-27}\ kg$
Ruhemasse Neutron	m_n	$1.6749 \cdot 10^{-27}\ kg$
Boltzmann Konstante	k	$1.381 \cdot 10^{-23}\ \frac{J}{K}$
Univ. Gaskonstante	R	$8.314\ J/mol/K$

B. Trigonometrie



$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta$

$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot\beta \quad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \tan\beta$