Elektrotechnik - Zusammenfassung

Patrick Pletscher

patrickp@student.ethz.ch
http://www.galaxysoft.ch

19. September 2004

Aus dem Unterricht von:
Prof. Ch. Hafner und Prof. R. Vahldieck

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen

1.1. Maxwellsche Gesetze

$$rot\ \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$rot\ \vec{H} = \vec{j}_{el} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

$$div\ \vec{D} = \rho_{el}$$

$$div\ \vec{B} = 0$$

$$div\ \vec{j} = -\frac{d\rho}{dt}$$

1.2. Elektrischer Strom

Die *positive Stromrichtung* ist die Bewegungsrichtung der positiven Ladungen.

$$i = \frac{dq}{dt} \quad [i] = A$$

1.3. Spannung und Potential

Die Spannung zwischen zwei Punkten ist definiert als die Potentialdifferenz der zwei Punkte im Raum.

$$U_{21} = \varphi_1 - \varphi_2$$

2. Elektrische Netzwerke bei Gleichstrom

2.1. Zweipole

Bei einem Zweipol sind die *Ströme an den beiden Anschlüssen identisch*. Zu jedem Zweipol muss ein Strompfeil und ein Spannungspfeil angegeben werden.

2.1.1. Verbraucherpfeilsystem

Meist verwenden wir das *Verbraucherpfeilsystem*, wobei der Strom- und Spannungspfeil in dieselbe Richtung zeigen. Falls die im Zweipol umgesetzte Leistung

$$P = UI \qquad P = \frac{U^2}{R} \qquad P = I^2 \cdot R$$

positiv ist, so verbraucht der Zweipol Leistung, andernfalls gibt er Leistung ab.

2.1.2. Kennlinien

Die Funktion $I(U)$ lässt sich graphisch darstellen und wird Kennlinie genannt. Sie besitzt *aktive* (Strom- und Spannungsrichtung entgegengesetzt) und *passive* (Strom- und Spannungsrichtung gleichgerichtet) Bereiche.

2.1.3. Linearisierung

Kennlinien sind im allgemeinen nicht linear, man kann sie aber in jedem Punkt linearisieren, mit:

$$U(I) = U_0 + RI \text{ oder } I(U) = I_0 + GU$$

Wobei R den Ohm'schen Widerstand bezeichnet und G den Leitwert , es gilt:

$$G = \frac{1}{R}$$

$[R] = \Omega$ (Ohm) $= 1V/A$, bzw. $[G] = S$ (Siemens) $= 1A/V$
Sind R und G ungleich Null, so könen beide Darstellungen verwendet und nach Belieben ausgetauscht werden, für die Spezialfälle $R = 0$ und $G = 0$ kommt jedoch nur eine Darstellung in Frage, die aber besonders einfach ist.

2.1.4. Ideale Strom- und Spannungsquellen

Für $R = 0$ wird offenbar $U(I) = U_0 = konst$, ein derartiger Zweipol wird als ideale Spannungsquelle bezeichnet. Analog ergibt sich eine ideale Stromquelle mit $I(U) = I_0$, wenn $G = 0$ ist.

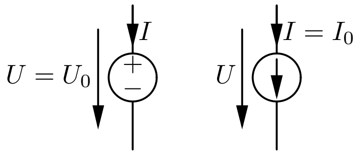


Abbildung 2.1.: Spannungs- und Stromquelle

2.1.5. Der Ohm'sche Widerstand

Ein anderer Spezialfall eines linearen Zweipols findet man, wenn die Quellterme U_0 und I_0 verschwinden, dann gilt

$$U = RI = \frac{I}{G} \text{ und } I = GU = \frac{U}{R}$$

Ohm'sche Widerstände haben keinen aktiven Bereich, sind also ideale Verbraucher.

2.1.6. Verlustbehaftete Quellen

Ein allgemeiner Zweipol kann als Kombination einer idealen Quelle mit einem Ohm'schen Widerstand bzw. Leitwert aufgefasst werden. Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. $U(I) = U_0 + RI$ wird aufgefasst als Serieschaltung einer idealen Spannungsquelle mit einem Widerstand R, man nennt R auch *Innenwiderstand*.
2. $I(U) = I_0 + GU$ wird aufgefasst als Parallelschaltung einer idealen Stromquelle mit einem Widerstand R. G wird dann als *Innenleitwert* bezeichnet.

2.1.7. Quellenumwandlung

Verlustbehaftete Spannungsquelle und verlustbehaftete Stromquelle können ineinander umgewandelt werden, dafür gilt folgender Zusammenhang:

$$U_0 = RI_0$$

Wobei die *Richtung der Spannung bzw. des Stromes entgegen der vormaligen Richtung des Stromes bzw. der Spannung* ist. Und der Widerstand R der selbe bleibt.

Abbildung 2.2.: Quellenumwandlung

Beispiel einer Quellumwandlung

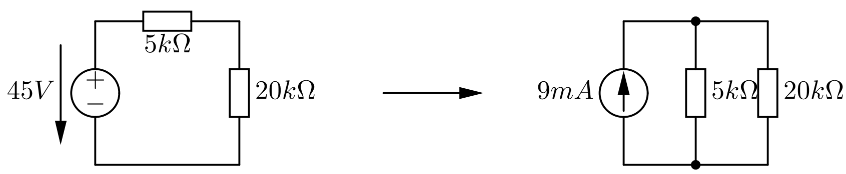


Abbildung 2.3.: Beispiel einer Quellenumwandlung mit konkreten Werten

2.1.8. Ideale Dioden

Ideale Dioden leiten in eine Richtung Strom widerstandslos und in der umgekehrten Richtung sperren sie vollständig.

Im leitenden Berich wird die Diode durch $R = 0$ und im Sperrbereich mit $G = 0$ beschrieben.

2.1.9. Reale Dioden

Reale Dioden leiten in Durchlassrichtung nicht ideal, insbesondere bei kleinen Spannungen unterhalb unterhalb einem bestimmtem Wert U_D (bei Si Dioden 0.6V) ist der Durchlassstrom nahezu Null.
Im Sperrbereich sind viele Dioden bei nicht zu hohen Spannungen nahezu ideal, d.h. der Sperrstrom ist meist vernachlässigbar klein. Wird eine Spannung $-U_z$ unterschritten, so beginnen Halbleiterdioden zu leiten, d.h. der Sperrstrom wächst rasant. Dieser Durchbruchseffekt wird Zenereffekt genannt und bei Zenerdioden bewusst ausgenützt. U_z wird als Zenerspannung bezeichnet.

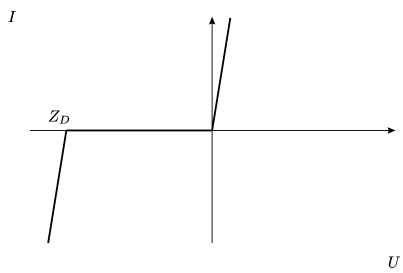


Abbildung 2.4.: *Kennlinie einer Zenerdiode*

2.2. Kirchhoffsche Gesetze

2.2.1. Knotengleichungen

Die Summe aller in einem Knotenpunkt zusammenlaufenden Strömen ist Null.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

Anders ausgedrückt: Die Summe der zum Knoten hineinfliessenden Ströme ist gleich der Summe der abfliessenden Ströme.

2.2.2. Maschengesetz

Die Summe aller Spannungen in einer Masche ist Null.

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$$

2.3. Serieschaltung von Zweipolen

In Serie geschaltete Bauelemente sind vom *selben* Strom durchflossen.

2.3.1. Widerstände

$$U = IR_{Serie}$$

$$R_{Serie} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Diese Schaltung wird auch als *Spannungsteiler* bezeichnet.

Spannungsteilerregel

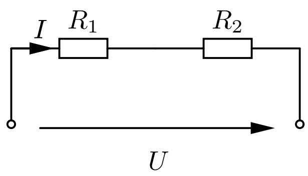


Abbildung 2.5.: *Spannungsteiler*

Werden zwei Widerstände vom selbem Strom durchflossen, so gilt:

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

Daraus folgt die die Spannungsteilerregel:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}; \quad \frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}; \quad \frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

In einer Reihenschaltung sind die Spannungsabfälle proportional zu den Widerstandswerten, an denen sie abfallen. Dies gilt sinngemäss auch für Serieschaltungen von mehr als zwei Widerständen.

Im Allgemeinen:

$$U_k = R_k I_{Serie} = R_k U_{Serie}/R_{Serie} = U_{Serie} \frac{R_k}{\sum_{i=1}^{n} R_i}$$

2.3.2. ideale Strom- und Spannungsquellen

Serieschaltung idealer Spannungsquellen

$$U_{serie\ q} = \sum_{i=1}^{n} U_{i\ q}$$

Eine Serieschaltung idealer Stromquellen mit unterschiedlichen Quellenströmen ist verboten.

2.4. Parallelschaltung von Zweipolen

Parallel geschaltete Bauelemente liegen an derselben Spannung.

2.4.1. Widerstände

$$I = U\frac{1}{R_{ges}}$$

$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}$$

Die Spannung über allen Widerständen ist gleich.

Für zwei Widerstände R_1, R_2 ergibt sich die praktische Formel

$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Diese Schaltung wird auch als *Stromteiler* bezeichnet.

Stromteilerregel

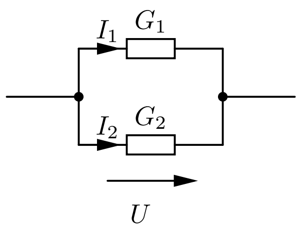


Abbildung 2.6.: *Stromteiler*

Liegen zwei Leitwerte bzw. Widerstände an derselben Spannung, so gilt:

$$U = \frac{I_1}{G_1} = \frac{I_2}{G_2} = \frac{1}{G_1 + G_2}$$

Daraus folgt die Stromteilerregel:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{G_1}{G_2}; \qquad \frac{I_1}{I} = \frac{G_1}{G_1 + G_2}; \qquad \frac{I_2}{I} = \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

In einer Parallelschaltung sind die Ströme proportional zu den Leitwerten, durch die sie fliessen. Dies gilt sinngemäss auch für Parallelschaltungen von mehr anls zwei Leitwerten.

Ersetzt man die Leitwerte durch Widerstände, so lautet die Stromteilerregel:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}; \qquad \frac{I_1}{I} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \qquad \frac{I_2}{I} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Die Teilströme verhalten sich reziprok zu den Widerstandswerten. Ein Teilstrom verhält sich zum Gesamtstrom wie der von diesem Teilstrom *nicht* durchflossene Widerstand zu der Summe der Widerstände.

Im Allgemeinen:

$$I_k = G_k U_{parallel} = G_k I_{parallel}/G_{parallel} = I_{parallel}\frac{G_k}{\sum_{i=1}^{n} G_i}$$

2.4.2. ideale Strom- und Spannungsquellen

Parallelschaltung idealer Stromquellen

$$I_{parallel\ q} = \sum_{i=1}^{n} I_{i\ q}$$

Eine Parallelschaltung idealer Spannungsquellen mit unterschiedlichen Quellenspannungen ist verboten.

2.5. Stern-Dreieck Umwandlung

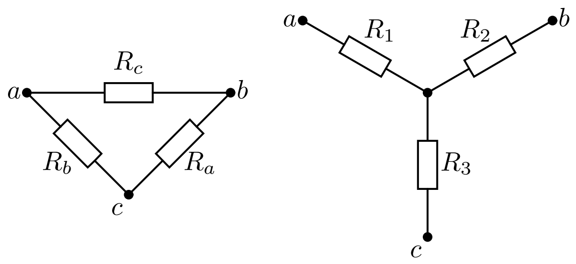


Abbildung 2.7.: *Links: Dreiecksschaltung, rechts: Sternschaltung*

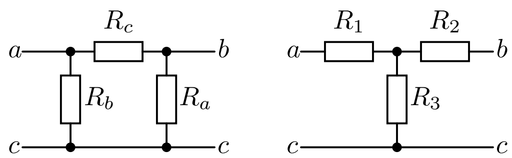


Abbildung 2.8.: *Links: π-Schaltung, rechts: T-Schaltung*

2.5.1. Stern (bzw. T) - Dreieck (bzw. π Umwandlung)

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

2.5.2. Dreieck (bzw. π) - Stern (bzw. T) Umwandlung

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

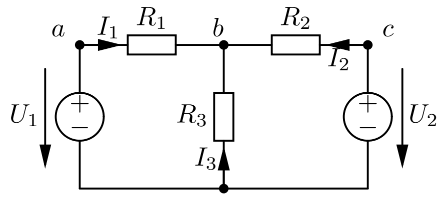


Abbildung 2.9.: *Beispielschaltung*

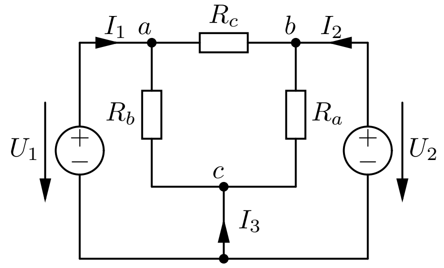


Abbildung 2.10.: *Transformierte Beispielschaltung*

2.5.3. Beispiel einer Stern - Dreieck Umwandlung

Nach einer Stern - Dreieck Transformation sieht die Schaltung folgendermassen aus. Man kann nun mit den Formeln für die Stern- Dreiecksumwandlung die Widerstände R_a, R_b, R_c berechnen. Danach kann man die Ströme durch die Dreick- Widerstände berechnen:

$$I_a = \frac{U_2}{R_a}, \qquad I_b = \frac{U_1}{R_b}, \qquad I_c = \frac{U_2 - U_1}{R_c}$$

Und damit kann man die Ströme durch die ursprünglichen Widerstände berechnen:

$$I_1 = I_b - I_c, \qquad I_2 = I_a + I_c, \qquad I_3 = -(I_a + I_b)$$

2.6. Thévenin, Norton und Quellenumwandlung

Wie bereits in (2.1.7) gesehen kann jeder verlustbehaftete, lineare Zweipol entweder als Parallelschaltung einer idealen Stromquelle mit einem Leitwert oder als Serieschaltung einer idealen Spannungsquelle mit einem Widerstand betrachtet werden. Jeder lineare (bzw. linearisierte), verlustbehaftete Zweipol kann also durch eine Stromquellenersatzschaltung oder eine Spannungsquellenersatzschaltung dargestellt werden.

Ebenso sieht jedes lineare Netzwerk mit nur zwei Anschlussklemmen von aussen gesehen wie ein linearer Zweipol aus und kann demzufolge durch eine verlustbehaftete Strom- (Satz von Norton) oder Spannungsquelle (Satz von Thévenin) ersetzt werden. Die Stromquellenersatzschaltung ist von Vorteil, wenn der betreffende Zweipol mit anderen parallel geschaltet, umgekehrt die Spannungsquellenersatzschaltung von Vorteil, wenn der betreffende Zweipol in Serie mit anderen Zweipolen geschaltet ist.

Weil Stromquelle (mit Innenleitwert) und Spannungsquelle (mit Innenwiderstand) von aussen ununterscheidbar sind, lassen sie sich auch ineinander umformen. Es gilt:

$$I_N = \frac{U_T}{R_i} \text{ bzw. } U_T = \frac{I_N}{G_I} \text{ wobei } R_i = \frac{1}{G_i} = \frac{U_T}{I_N}$$

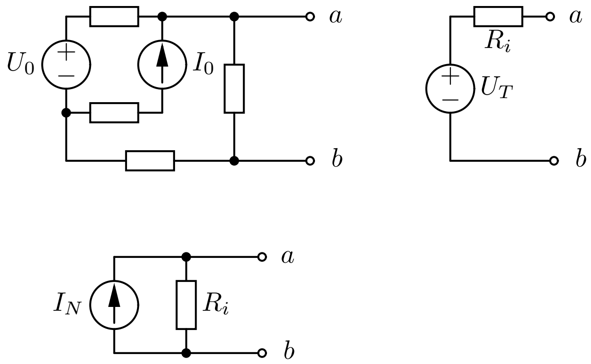
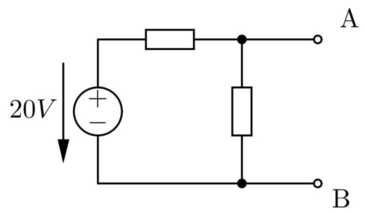


Abbildung 2.11.: *Prinzipbeispiel für die Umwandlung einer Schaltung in eine Thévenin und in eine Norton Äquivalenz*

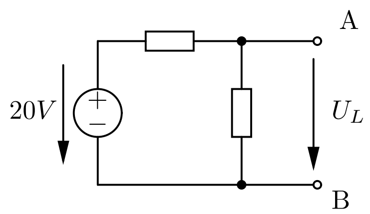
2.6.1. Beispiel einer Ersatzschaltung nach Thévenin und Norton

Es soll für die folgende Schaltung eine Ersatzschaltung nach Thévenin bzw. Norton gefunden werden.



Man bestimmt als erstes den Innenwiderstand.

1. Leerlauf: Spannungsteiler



Für U_L ergibt sich:

$$U_L = 20V \cdot \frac{10\Omega}{10\Omega + 10\Omega} = 10V$$

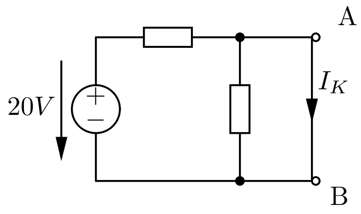
2. Kurzschluss

$$I_K = \frac{20V}{10\Omega} = 2A$$

Damit ergibt sich für den Innenwiderstand:

$$R_i = \frac{U_L}{I_K} = \frac{10V}{2A} = 5\Omega$$

Für die Bestimmung des Innenwiderstandes kann man auch eine alternative Methode benutzen. Dabei setzt man die Quellen auf Null und betrachtet die Schaltung von den Klemmen hinein. Man bestimmt den Widerstand der Schaltung, welcher äquivalent



zum Innenwiderstand R_i ist.

Und dadurch für die Ersatzschaltungen:

Thévenin

$$U_0 = U_L = 10V,\ R_i = 5\Omega$$

Norton

$$I_0 = I_K = 2A,\ R_i = 5\Omega$$

2.7. Weitere Vereinfachungen und Überlegungen

2.7.1. Spannungsquelle

Eine ideale Spannungsquelle in Parallel mit einem beliebigen Netzwerk (das aber keine andere Spannungsquelle, insbesondere kein Kurzschluss darstellen darf) wirkt von aussen wie die Spannungsquelle allein ($R_i = 0$). Das Netzwerk spielt dabei keine Rolle. Das geht aus der Definition der idealen Spannungsquelle hervor.

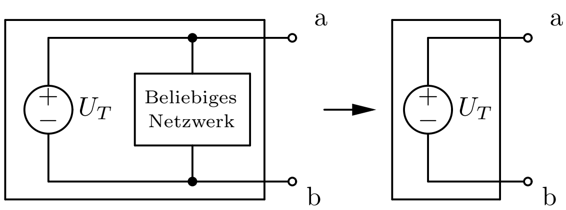


Abbildung 2.12.: *Vereinfachungen an einer Spannungsquelle*

2.7.2. Stromquelle

Eine ideale Stromquelle in Serie mit einem beliebigen Netzwerk (das aber keine andere Stromquelle, insbesondere kein offener Kreis, darstellen darf) wirkt von aussen wie die Stromquelle allein ($R_i = \infty$). Das Netzwerk spielt dabei keine Rolle. Das geht aus der Definition der idealen Stromquelle hervor.

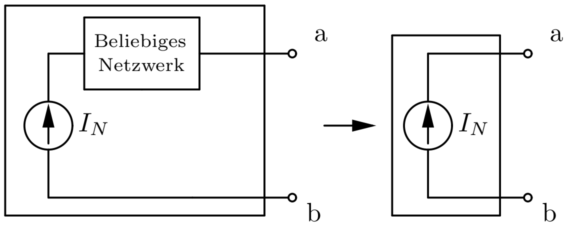


Abbildung 2.13.: *Vereinfachungen an einer Stromquelle*

2.8. Quellenüberlagerung, Superpostionsprinzip

Nach dem *Superpositionsprinzip* kann in einem linearen Netzwerk die Wirkung *einer* Ursache unabhängig von allen anderen Ursachen und Wirkungen berechnet werden. Die resultierende Wirkung ist dann die Summe aller Einzelwirkungen.

Für die Berechnung linearer Netzwerke bedeutet dies, dass zunächst alle Ströme einzeln als Wirkung der einzelnen Spannungs- und Stromquellen berechnet werden. Danach werden die so ermittelten Teilströme vorzeichenrichtig addiert, um den den resultierenden Strom zu bestimmen. Bei der Berechnung der Teilströme werden die jeweils *nicht* betrachteten Spannungsquellen durch Kurzschlüsse ersetzt und die jeweils *nicht* betrachteten Stromquellen herausgenommen.

Beispiel:

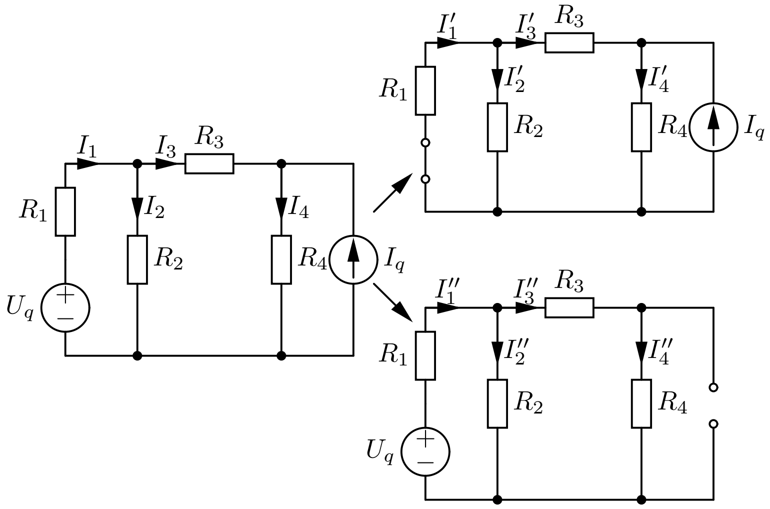


Abbildung 2.14.: *Lösungsverfahren nach dem Superpostionsprinzip*

Kurzschluss der Spannungsquelle U_q und die Anwendung der Stromteilerregel führt zu:

$$I_4' = I_q \frac{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}}{R_4 + R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}}$$

Herausnehmen der Stromquelle I_q und die Anwendung der Stromteilerregel führt zu:

$$I_4'' = I_1'' \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{U_q}{R_1 + \frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4}$$

Der Strom I_4 berechnet sich dann:

$$I_4 = I_4' + I_4''$$

2.9. Systematische Methoden

2.9.1. Knotenanalyse

In der Knotenpotentialanalyse ordnet man jedem Knoten ein Potential zu, wobei *ein* Knoten das Bezugspotential $\varphi = 0$ bekommt.

1. Wandle alle Spannungsquellen in Stromquellen um.
2. Man wählt einen beliebigen Knoten als Bezugsknoten. Es ist empfehlenswert, einen möglichst grossen Knoten auszuwählen.
3. Für jeden Knoten werden die sogenannten Knotenspannungen zugeordnet. Die entsprechenden Spannungspfeile beginnen beim betreffenden Knoten und enden beim Bezugsknoten. Sind M Knoten vorhanden, so definiert man $M-1$ Knotenspannungen.
4. Danach stellt man die voneinander unabhängigen Knotengleichungen auf, indem man die Ströme mittels der Potentialdifferenzen, geteilt durch die Widerstände, ausdrückt ($I_n = \Delta\varphi/R_m$).
5. Dies ergibt ein Gleichungsssystem mit so vielen Gleichungen, wie unbekannte Potentiale vorhanden sind. In Matrixschreibweise:

   $$\mathbf{GU} = \mathbf{I}$$

   Dabei ist **G** die Leitwertmatrix. Diese Matrix ist symmetrisch und enthält Summen der Leitwerte der verschiedenen Zweipole. **U** enthält die Knotenspannungen und **I** enthält die Stromquellen.
6. Sind die Knotenspannungen durch Auflösen des eben erhaltenen Gleichungssystems berechnet, so erhält man die Spannungen über den Zweipolen sofort aus der Differenz der Knotenspannungen an den beiden Klemmen des Zweipols.

Beispiel

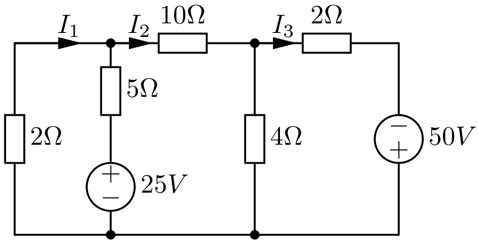


Abbildung 2.15.: *Knotenanalyse*

In Abbildung (2.15) werden nun alle Spannungsquellen durch Stromquellen ersetzt und die Knoten beschriftet dadurch ergibt sich Abbildung (2.16).

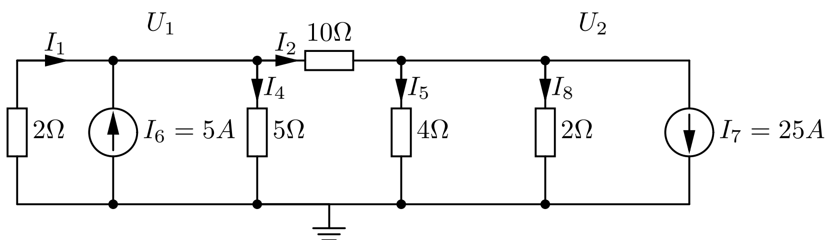


Abbildung 2.16.: *Knotenanalyse*

Nun stellt man die Gleichungen für die verschiedenen Knoten auf:

U_1:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_4 &= -I_6 \\ -\frac{U_1}{2\Omega} - \frac{U_1 - U_2}{10\Omega} - \frac{U_1}{5\Omega} &= -5 \end{aligned}$$

U_2:

$$\begin{aligned} I_2 - I_8 - I_5 &= I_7 \\ \frac{U_1 - U_2}{10\Omega} - \frac{U_2}{2\Omega} - \frac{U_2}{4\Omega} &= 25 \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 25 \end{pmatrix}$$

2.9.2. Maschenanalyse

1. Man wandelt alle Stromquellen in Spannungsquellen um.

2. Bei der Methode der Maschengleichungen definieren wir Maschenströme und notieren für diese die Maschengleichungen. Maschenströme sind in einer Masche zirkulierende Ströme.
   Das Auffinden von unabhängigen Maschen ist etwas schwieriger als das Auffinden unabhängiger Knoten bei der Knotenanalyse. Man kann systematisch Maschen solange erzeugen, bis jeder Zweipol zu mindestens einer Masche gehört und muss dabei lediglich beachten, dass jede neue Masche einen zuvor noch nicht berücksichtigten Zweipol enthält, natürlich versucht man möglichst kleine Maschen zu wählen.

3. Man notiert nun die Maschengleichungen, in denen die Spannungen über idealen Spannungsquellen bekannt sind und die Spannungen über Widerständen R_k durch $I_k = U_k/R_k$ ersetzt werden

4. Man ersetzt die Zweipolströme durch die Maschenströme und erhält die Matrizengleichung
   $$\mathbf{RI} = \mathbf{U}$$
   Dabei ist $\mathbf{R}$ die symmetrische Widerstandsmatrix. Die Vektoren $\mathbf{I}$ und $\mathbf{U}$ enthalten die Maschenströme und die Quellenspannungen.

5. Gleichungssystem auflösen.

6. Die unbekannten Ströme in den Zweipolen werden aus den Maschenströmen bestimmt. Dabei werden alle Maschenströme aufsummiert, welche durch den betreffenden Zweipol fliessen

7. Die unbekannten Spannungen über den Widerständen werden mit $U_k = R_k/I_k$ berechnet.

Beispiel

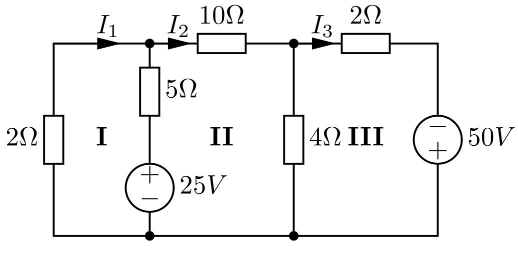


Abbildung 2.17.: *Maschenanalyse*

I:

$$\begin{aligned} U_{2\Omega} + U_{5\Omega} + 25V &= 0 \\ I_1 \cdot 2\Omega + (I_1 - I_2)5\Omega &= -25V \end{aligned}$$

II:

$$\begin{aligned} U_{10\Omega} + U_{4\Omega} - 25V - U_{5\Omega} &= 0 \\ I_2 \cdot 10\Omega + (I_2 - I_3)4\Omega - (I_1 - I_2)5\Omega &= 25V \end{aligned}$$

III:

$$\begin{aligned} U_{2\Omega} - 50V - U_{4\Omega} &= 0 \\ I_3 \cdot 2\Omega - (I_2 - I_3)4\Omega &= 50 \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 7\Omega & -5\Omega & 0 \\ -5\Omega & 19\Omega & -4\Omega \\ 0 & -4\Omega & 6\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25V \\ 25V \\ 50V \end{pmatrix}$$

3. Schaltvorgänge

3.1. Kondensatoren und Kapazitäten

3.1.1. Überblick

SI-Einheit: F (Farad); $1F = \frac{As}{V}$

In der Kapazität ist der Strom i proportional zur zeitlichen Änderung der Spannung u.

$$i(t) = C\frac{du}{dt}; \qquad u(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + U_0; \qquad C = i(t)\frac{dt}{du}$$

Die Spannung U_0 ist die Spannung, die zu Beginn des Integrationsintervalles bereits an der Kapazität lag. Speist man eine Kapazität mit einem konstanten Strom, so steigt die Spannung linear an.

An der Kapazität verläuft die Spannung immer stetig, der Strom kann unstetig sein.

Für den Zusammenhang von Spannung und Ladungen gilt:

$$U = \frac{Q}{C}$$

3.1.2. Ideale Stromquelle und Kondensator

Wir betrachten nun den Ladevorgang eines Kondensators, d.h. wir nehmen an, der zunächst ungeladene Plattenkondensator werde zur Zeit $t = 0$ bis zur Zeit $t = T$ an eine ideale Stromquelle I_0 angeschlossen.

Die Anfangsbedingung lautet $u(0) = 0$. Danach ergibt sich ein linearer Spannungsanstieg für $0 < t < T$ wegen

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)dt = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} I_0 dt = \frac{tI_0}{C}$$

Schliesslich bleibt für $t > T$ die Spannung über der Kapazität konstant, weil nach $t = T$ kein Strom mehr fliesst. Die Spannung ist dann $u(t) = \frac{I_0 T}{C}$.

3.1.3. Serieschaltung von R und C an einer Stromquelle

Anwendung der Maschenregel führt zu:

$$u = I_0 R + \frac{1}{C}\int I_0 dt$$

Lösung:

$$u(t) = I_0 R + \frac{1}{C} I_0 t$$

Dabei ist $u(t)$ die Spannung über R und C.

3.1.4. Serieschaltung von R und C an einer Spannungsquelle

Äquivalent zu einer Stromquelle mit Innenwiderstand.

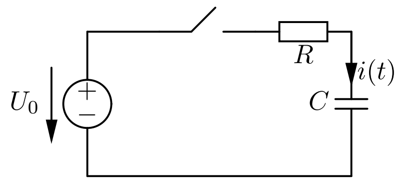


Abbildung 3.1.: *Serieschaltung von R und C an einer Spannungsquelle*

Nehmen wir an, dass für $t < 0$ der Schalter offen und die Kapazität ungeladen sei und dass der Schalter für $t > 0$ geschlossen sei.

$$i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}; \qquad u_C(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}); \qquad u_r(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}; \qquad \tau = RC$$

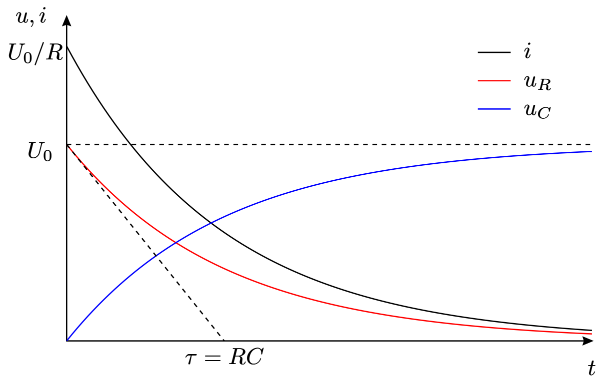


Abbildung 3.2.: *Serieschaltung von R und C an einer Spannungsquelle*

Eine charakteristische Grösse, welche die Geschwindigkeit des Aufladevorgangs beschreibt ist die *Zeitkonstante*

$$\tau = RC$$

Nachdem die Zeit $t = \tau$ verstrichen ist, ist die Spannung an der Kapazität auf $U_0(1 - 1/e)$ angewachsen.

In der Praxis wird der Aufladevorgang immer irgendwann abgebrochen. Wird die Kapazität vom Netzwerk getrennt, so dass kein Strom mehr fliessen kann, so bleibt die Spannung konstant.

Der Kondensator wird über den Widerstand geladen. Da die Spannung über dem Kondensator bei diesem Vorgang steigt, wird die Spannung über dem Widerstand währenddessen kleiner. Der Strom ist proportional zur Spannung u_R, wird demnach ebenfalls stetig kleiner (siehe Abb. 3.2).

3.1.5. Parallelschaltung von R und C an einer Stromquelle

$$u(t) = I_0 R(1 - e^{-\frac{t}{RC}}); \qquad i_R(t) = I_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}); \qquad i_C(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}; \qquad \tau = RC$$

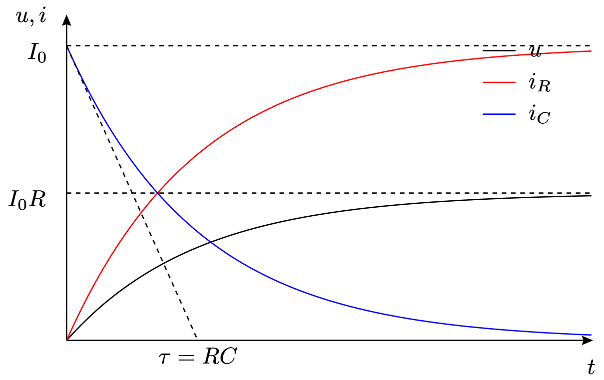


Abbildung 3.3.: *Parallelschaltung von R und C an einer Stromquelle*

3.1.6. Entladung eines Kondensators

Betrachtet man aufgeladene, reale Kondensatoren, so stellt man fest, dass diese sich mit der Zeit entladen, man kann reale Kondensatoren mit einer Ersatzschaltung bestehend aus einer Kapazität C und einem parallelen Widerstand R approximieren.

D.h. wir lassen die Anschlüsse des Kondensators offen.

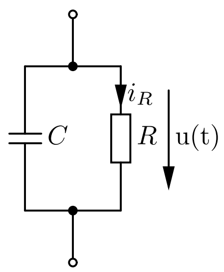


Abbildung 3.4.: *Ersatzschaltung eines realen Kondensators (mit Innenwiderstand R)*

Für die Spannung u und den Strom i_R gilt:

$$u(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}; \qquad i_R(t) = \frac{u(t)}{R}$$

Vergleiche den Verlauf der Spannung mit Abbildung 3.2.

3.1.7. Parallelschaltung von R und C an einer Spannungsquelle

Solche Schaltungen führen in der Praxis zur Zerstörung des Schalters.

3.2. Induktivität und Spulen

3.2.1. Überblick

SI-Einheit: H (Henry); $1H = 1\frac{Vs}{A}$

An der Induktivität ist die Spannung u proportional zur zeitlichen Änderung des Stromes i.

$$u = L\frac{di}{dt}; \qquad i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t_1} u(t)dt + I_0; \qquad L = u(t)\frac{dt}{di}$$

Der Strom I_0 ist der Strom, der zu Beginn des Integrationsintervalles bereits floss. Legt man eine konstante Spannung an eine Induktivität, so steigt der Strom linear an.

In einer Induktivität verläuft der Strom immer stetig, die Spannung kann unstetig sein.

Zwischen Induktivität und Kapazität gilt das Dualitätsprinzip.

3.2.2. Entladung einer Spule mit Innenwiderstand R

D.h. wenn die Spulenenden kurzgeschlossen werden.

$$i(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{tR}{L}}$$

3.2.3. Parallelschaltung von R und L an einer Stromquelle

$$u(t) = I_0 R \cdot e^{-\frac{tR}{L}}; \qquad i_L(t) = I_0(1 - e^{-\frac{tR}{L}}); \qquad i_R(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{tR}{L}}; \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

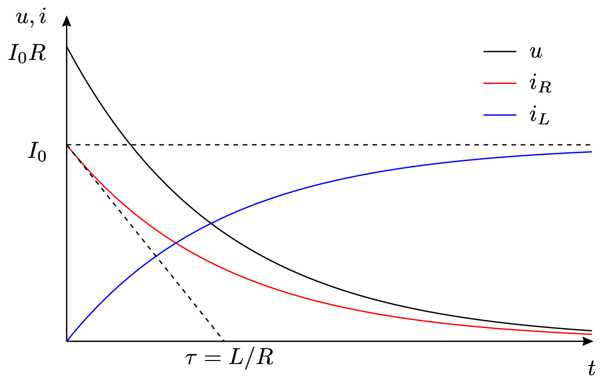


Abbildung 3.5.: *Parallelschaltung von R und L an einer Stromquelle*

Der Strom I_0 fliesst nach dem Umlegen des Schalters zunächst durch R. Der Strom i_L beginnt mit der Steigung $di/dt = I_0 R/L$. Während der Strom i_L steigt, verkleinert sich der Strom i_R bis die Induktivität den gesamten Strom I_0 übernommen hat. Dann ist $u = 0$ wegen $i_R = 0$ (siehe Abb. 3.5).

3.2.4. Serieschaltung von R und L an einer Spannungsquelle

$$i(t) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{tR}{L}}); \qquad u_R(t) = U_0(1 - e^{-\frac{tR}{L}}); \qquad u_L(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{tR}{L}}; \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ liegt die Spannung $u_L = U_0$ an der Induktivität. Der Strom i ist zu diesem Zeitpunkt noch Null. Der Strom i beginnt mit der Steigung $di/dt = U_0/L$ grösser zu werden. Dadurch wird der Spannungsabfall über R zunehmend grösser und u_L und di/dt zunehmend kleiner (siehe Abb. 3.6).

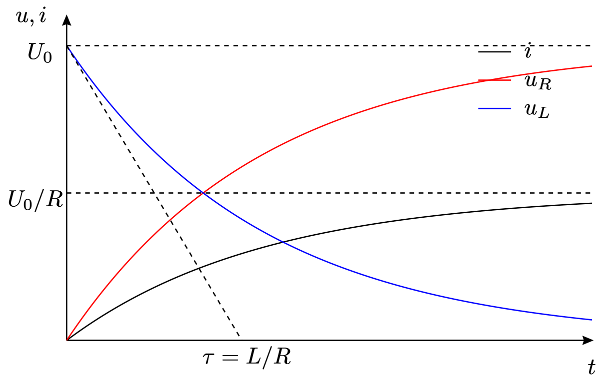


Abbildung 3.6.: *Serieschaltung von R und L an einer Spannungsquelle*

3.2.5. Serieschaltung von R und L an einer Stromquelle

u_L wächst dabei über alle Masse und führt in der Praxis zur Zerstörung des Schalters.

3.2.6. Parallelschaltung von R und L an einer Spannungsquelle

$$i(t) = \frac{U_0}{R} + \frac{U_0 t}{L}$$

3.3. Physikalische Grössen

3.3.1. Leistung

SI-Einheit Leistung: W (Watt); 1 W = 1 VA
momentane Leistung:

$$p(t) = u(t)i(t)$$

Momentanleistung einer Kapazität:

$$p(t) = Cu(t)\frac{du}{dt}$$

Momentanleistung einer Spule:

$$p(t) = Li(t)\frac{di}{dt}$$

3.3.2. Arbeit und Energie

Die Arbeit/Energie ist das Integral über die Leistung

$$w(t) = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt$$

SI-Einheit Energie: Ws (Wattsekunde); J (Joule)

Kapazitäten und Induktivitäten speichern die Energie, welche ihnen beim Ladevorgang zugeführt wurde.

Kapazität

$$w(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} u(t)i(t)dt + W_0 = C\int_{t_0}^{t_1} u(t)\frac{du}{dt}dt + W_0 = C\frac{u^2(t_1) - u^2(t_2)}{2} + W_0$$

Für Gleichspannung U und $W_0 = 0$ gilt:

$$w(t) = \frac{CU^2(t)}{2}$$

Induktivität

$$w(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} u(t)i(t)dt + W_0 = L\int_{t_0}^{t_1} i(t)\frac{di}{dt}dt + W_0 = L\frac{i^2(t_1) - i^2(t_0)}{2} + W_0$$

Für den Gleichstrom I und $W_0 = 0$ gilt:

$$w(t) = \frac{CI^2(t)}{2}$$

3.4. Serieschaltungen

3.4.1. Induktivitäten

$$u(t) = L_{ges}\frac{di}{dt}$$

$$L_{ges} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

3.4.2. Kapazitäten

$$u(t) = \frac{1}{C_{ges}}\int_0^t idt + U_0$$

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$$

Die Ladungen Q sind gleich, während die Spannungen U umgekehrt proportional ($U_1 = U_2 \cdot C_2/C_1$) sind.

3.5. Parallelschaltungen

3.5.1. Induktivitäten

$$i(t) = \frac{1}{L_{ges}}\int_0^t udt + I_0$$

$$\frac{1}{L_{ges}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L_i}$$

3.5.2. Kapazitäten

$$i(t) = C_{ges}\frac{du}{dt}$$

$$C_{ges} = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Die Ladung Q der Kondensatoren sind umgekehrt proportional, während die Spannung U gleich ist.

4. Wechselstrom

4.1. Komplexe Darstellung und Zeiger

Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz und Periode:

$$\omega = 2\pi/T \qquad \omega = 2\pi f$$

Sei

$$f(t) = \hat{A}\cos(\omega t + \varphi)$$

eine harmonische Funktion mit bestimmter Kreisfrequenz ω, Amplitude $\hat{A}$ und Phase φ.

Diese können wir mittels Addititionstheorem auf die Form

$$f(t) = a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t)$$

bringen, mit den zwei Amplituden

$$a = \hat{A}\cos\varphi, \qquad b = \hat{A}\sin\varphi$$

Sind a und b bekannt, so erhält man daraus

$$\hat{A} = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \varphi = \arctan(b/a)$$

Wenn man sich das in der 2-dimensionalen xy Ebene vorstellt, so sind $\hat{A}$ und φ Polarkoordinaten des Punktes (a, b) in der xy Ebene.

Die xy Ebene können wir aber auch als komplexe Ebene $z = x + jy$ auffassen. In dieser Ebene beschreibt die komplexe Zahl $\underline{C} = a + jb$ die Amplituden a und b unserer harmonischen Funktion und es gilt

$$\hat{A} = \sqrt{\Re(\underline{C})^2 + \Im(\underline{C})^2} = |\underline{C}|, \qquad \varphi = \arctan(\frac{\Im(\underline{C})}{\Re(\underline{C})})$$

Es macht nun Sinn die $f(t)$ folgendermassen zu notieren:

$$f(t) = \Re(\underline{C}e^{j\omega t})$$

4.2. Blind-, Wirk-, und Scheinleistung

Betrachten wir einen linearen Zweipol, über dem die Spannung

$$u(t) = \Re(\underline{U}e^{j\omega t}) = \hat{U}\cos(\omega t + \varphi_U)$$

liegt und durch den der Strom

$$i(t) = \Re(\underline{I}e^{jwt}) = \hat{I}\cos(\omega t + \varphi_I)$$

fliesst. Dabei gilt gemäss vorhergehendem Abschnitt

$$\hat{U} = \sqrt{\Re(\underline{U})^2 + \Im(\underline{U}^2)} = |\underline{U}|, \qquad \varphi_U = \arctan(\Im(\underline{U})/\Re(\underline{U}))$$

$$\hat{I} = \sqrt{\Re(\underline{I})^2 + \Im(\underline{I}^2)} = |\underline{I}|, \qquad \varphi_I = \arctan(\Im(\underline{I})/\Re(\underline{I}))$$

Für den Zeitwert der Leistung des Zweipols gilt also

$$p(t) = \hat{U}\hat{I}\cos(\omega t + \varphi_U)\cos(\omega t + \varphi_I)$$

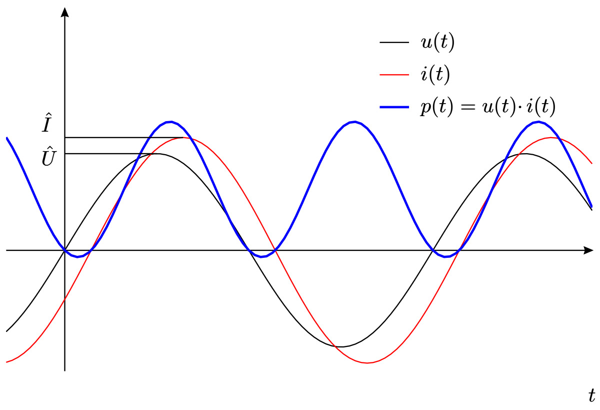


Abbildung 4.1.: *Verlauf von $u(t)$, $i(t)$ und $p(t)$*

Im Folgenden bezeichnen

$$U_{eff} = \hat{U}/\sqrt{2}; \qquad I_{eff} = \hat{I}/\sqrt{2}$$

die Effektivwerte von Strom und Spannung

Die mittlere Leistung ist definiert als

$$P = \overline{p} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} p(t)dt$$

4.2.1. Scheinleistung

$$S = U_{eff}I_{eff}$$

Für den Zusammenhang zwischen Schein-, Wirk- und Blindleistung gilt

$$\underline{S} = P + jQ \qquad S = |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

- Die Wirkleistung ist der Realteil der komplexen Leistung
- Die Blindleistung ist der Imaginärteil der komplexen Leistung
- Die Scheinleistung ist der Betrag der komplexen Leistung

4.2.2. Wirkleistung

$$P = U_{eff}I_{eff}\cos\varphi, \qquad P = S\cos\varphi$$

Wobei $\varphi = \varphi_U - \varphi_I$

P ist der Mittelwert des Zeitwertes der Wirkleistung. Wirkleistung lässt sich in andere Formen der Leistung (Wärme usw.) überführen.

Zeitwert der Wirkleistung

$$p_W(t) = S\cos(\varphi)[1 + \cos 2(\omega t + \varphi_u)]$$

Wirkstrom

Bei der Darstellung eines komplexen Zweipols als Parallel-Ersatzschaltung eines Wirk- und eines Blindwiderstandes kann man den Leistungsfaktor $\cos\varphi$ modellhaft dem Strom zuordnen. Man spricht dann vom *Wirkstrom.*

$$I_w = I \cdot \cos\varphi$$

Diese Darstellung ist nur sinnvoll bei Parallelschaltungen.

Wirkspannung

Bei der Darstellung eines komplexen Zweipols als Serie-Ersatzschaltung eines Wirk- und eines Blindwiderstandes kann man den Leistungsfaktor $\cos\varphi$ modellhaft der Spannung zuordnen. Man spricht dann von *Wirkspannung.*

$$U_w = U \cdot \cos\varphi$$

Diese Darstellung ist nur sinnvoll bei Serieschaltungen.

4.2.3. Blindleistung

$$Q = U_{eff} I_{eff} \sin\varphi, \qquad Q = S\sin\varphi$$

Q ist der Mittelwert des Zeitwertes der Blindleistung. Blindleistung lässt sich *nicht* in andere Formen der Leistung umwandeln.

Zeitwert der Blindleistung

$$p_b(t) = S\sin(\varphi)[\sin 2(\omega t + \varphi_u)]$$

Blindstrom

Bei der Darstellung eines komplexen Zweipols als Parallel-Ersatzschaltung eines Wirk- und eines Blindwiderstandes kann man den Leistungsfaktor $\sin\varphi$ modellhaft dem Strom zuordnen. Man spricht dann vom *Blindstrom.*

$$I_b = -I \cdot \sin\varphi$$

Diese Darstellung ist nur sinnvoll bei Parallelschaltungen.

Blindspannung

Bei der Darstellung eines komplexen Zweipols als Serie-Ersatzschaltung eines Wirk- und eines Blindwiderstandes kann man den Leistungsfaktor $\sin\varphi$ modellhaft der Spannung zuordnen. Man spricht dann von *Blindspannung.*

$$U_b = U \cdot \sin\varphi$$

Diese Darstellung ist nur sinnvoll bei Serieschaltungen.

4.2.4. Bemerkungen

Wird das Verbraucherpfeilsystem verwendet und ist die Wirkleistung P eines Zweipols positiv, so nimmt der Zweipol im Zeitmittel Energie auf. Die Blindleistung ist ein Mass für die Energiemenge, welche ein Zweipol während jeder Schwingungsperiode aufnimmt und wieder abgibt. Wir werden gleich sehen, dass ideale Kapazitäten und Induktivitäten Bauelemente sind, deren Wirkleistung Null ist, deren Blindleistung hingegen positiv ist.

4.3. Bauelemente

4.3.1. Quellen

Spannungsquelle

$$u(t) = \Re(\underline{U}e^{j\omega t})$$

$\underline{U}$ beinhaltet die Amplitude $\hat{U}$ und die Phasenlage zur Zeit $t = 0$:

$$\hat{U} = \sqrt{\Re(\underline{U})^2 + \Im(\underline{U})^2} = |\underline{U}|, \qquad \varphi_u = \arctan(\frac{\Im(\underline{U})}{\Re(\underline{U})})$$

Enthält das angeschlossene Netzwerk nur lineare Bauteile und Quellen mit derselben Kreisfrequenz ω, so ist auch der Strom der Spannungsquelle harmonisch und es gilt:

$$i(t) = \Re(\underline{I}e^{j\omega t})$$

$$\hat{I} = \sqrt{\Re(\underline{I})^2 + \Im(\underline{I})^2} = |\underline{I}|, \qquad \varphi_u = \arctan(\frac{\Im(\underline{I})}{\Re(\underline{I})})$$

Je nach Belastung der Spannungsquelle durch das Netzwerk ergeben sich unterschiedliche Ströme. Damit kann auch die von der Quelle abgegebene Wirkleistung unterschiedlich gross sein. Wird die Quelle nur durch ein Netzwerk mit Ohm'schen Widerständen belastet, so wird die abgegebene Wirkleistung positiv und die Blindleistung $Q = 0$.

Stromquelle

Für die ideale harmonische Stromquelle gilt das äquivalente zur Spannungsquelle, nur ist bei diesen $\underline{I}$ gegeben, während sich $\underline{U}$ aus der Belastung durch das angeschlossene Netzwerk ergibt.

4.3.2. Widerstand

$$U_{eff} = RI_{eff}; \qquad \hat{U} = R\hat{I}; \qquad \varphi_U = \varphi_L; \qquad \underline{U} = R\underline{I}$$

Der Widerstand verbraucht die Leistung

$$P = \hat{U}\hat{I}/2 = U_{eff}I_{eff} = RI_{eff}^2 = U_{eff}^2/R$$

Die Blindleistung des Widerstandes verschwindet weil die Phasendifferenz von Strom und Spannung verschwindet.

4.3.3. Kapazität

$$\underline{I} = j\omega C\underline{U}; \qquad I_{eff} = \omega C U_{eff}; \qquad \hat{I} = \omega C\hat{U}; \qquad \varphi = -\pi/2$$

Die letzte Gleichung besagt, dass der Strom der Spannung um $\pi/2$ *nachläuft.*

Die Kapazität verbraucht keine Wirkleistung:

$$P = 0$$

Der Betrag der Blindleistung der Kapazität ist maximal. Wird eine Kapazität an eine ideale Quelle angeschlossen, so pendelt die gesamte Energie zwischen Quelle und Kapazität hin und her.

4.3.4. Induktivität

$$\underline{U} = j\omega L\underline{I}; \qquad U_{eff} = \omega L I_{eff}; \qquad \hat{U} = \omega L\hat{I}; \qquad \varphi = +\pi/2$$

Die letzte Gleichung besagt, dass der Strom der Spannung um $\pi/2$ *vorläuft.*

Die Induktivität verbraucht keine Wirkleistung:

$$P = 0$$

Der Betrag der Blindleistung der Induktivität ist maximal. Wird eine Induktivität an eine ideale Quelle angeschlossen, so pendelt die gesamte Energie zwischen Quelle und Induktivität hin und her.

4.4. Impedanz und Admittanz

4.4.1. Impedanz

Bei einer Serieschaltung von Widerstand und Induktivität summieren sich die Spannungen und wir erhalten

$$\underline{U} = (R + j\omega L)\underline{I} = \underline{Z}\,\underline{I}$$

Dabei ist $\underline{Z} = R + j\omega L$ die (komplexe) *Impedanz.* Man schreibt auch $\underline{Z} = R + jX$. Dabei bezeichnet X die Reaktanz.

Bei Serieschaltungen summieren sich die Impedanzen.

4.4.2. Admittanz

Die *Admittanz* ist als der Kehrwert der Impedanz definiert

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z}$$

Bei Parallelschaltungen summieren sich die Admittanzen.

4.4.3. Impedanz und Admittanz von Bauelementen

Widerstand

$$\underline{Z} = R; \qquad \underline{Y} = \frac{1}{R}$$

Kapazität

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}; \qquad \underline{Y} = j\omega C$$

Induktivität

$$\underline{Z} = j\omega L; \qquad \underline{Y} = \frac{1}{j\omega L} = \frac{-j}{\omega L}$$

4.5. Spezielle Schaltungen

4.5.1. Schwingkreise

Ideale Schwingkreise

Da die Impedanzen von L und C - je nach Frequenz - die gesamte positive bzw. negative imaginäre Achse überstreichen, *verschwindet für jede LC Serieschaltung die Impedanz* bei einer ganz bestimmten Frequenz ω_0. Es gilt

$$j\omega_0 L - j\frac{1}{\omega_0 C} = 0 \qquad \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Wird die Impedanz Null, so wird natürlich die Admittanz *unendlich*.

Falls man L und C *parallel* schaltet, so wird die *Admittanz* bei dieser Frequenz ω_0 gleich *Null* und dafür die *Impedanz unendlich*.

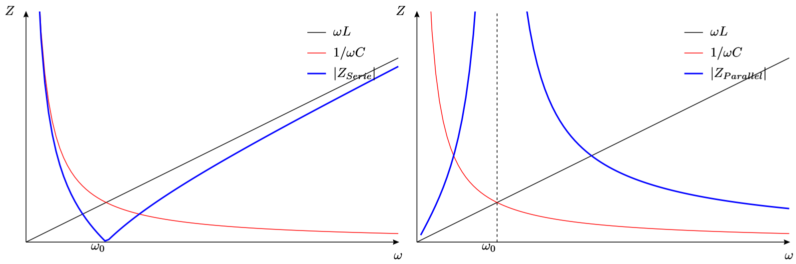


Abbildung 4.2.: *Ortskurve des Betrages $|Z|$ der Impedanz $\underline{Z}$. Links: Serie-, Rechts: Parallelschaltung*

Reale Schwingkreise

In der Praxis lassen sich ideale Induktivitäten bzw. Kapazitäten nicht realisieren. Reale Spulen und Kondensatoren weisen Ohm'sche Verluste auf, werden also durch Serie- bzw. Parallelschaltungen von Induktivitäten bzw. Kapazitäten mit Widerständen approximiert. In der Nähe der Resonanzfrequenz werden die Widerstände dominant.

Um die Umgebung der Resonanzfrequenz zu analysieren, wird die *Verstimmung*

$$\eta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\omega_0}$$

eingeführt.

Wir führen einen Widerstand in Serie- und Parallelschwingkreis ein um den Ohmschen Verlust von Induktivität und Kapazität Rechnung zu tragen.
Um die Qualität eines Schwingkreises zu messen, wird die Güte Q wie folgt definiert:

$Q = 2\pi$(max. Energie in L oder C)/(pro Periode in R in Wärme umgesetzte Energie)

Es ergibt sich für den Serieschwingkreis

$$Q_S = \omega_0 L_S / R_S = \frac{\sqrt{L_S/C_S}}{R_S}$$

und für eine Parallelschaltung

$$Q_P = \omega_0 C_P R_P = R_P \sqrt{C_P/L_P}$$

Bestimmen der Resonanzfrequenz

Um die Resonanzfrequenz einer beliebigen Schaltung zu bestimmen, benutzt man, dass gelten muss:

$$\Im(\underline{Z}) = 0$$

$\Re(\underline{Z})$ ist irrelevant und Terme welche $\Im(\underline{Z})$ nicht beeinflussen können schon vorher weggelassen werden.

4.5.2. Zweitore - Passive Filter

Besteht aus *RLC* Netzwerken. Um dieses Zweitor zu charakterisieren, betrachten wir die Ausgangsgrössen als Funktion der Eingangsgrössen und ihre Abhängigkeit von der Frequenz.

Wir gehen davon aus, dass am Eingang eine ideale Spannungsquelle angeschlossen ist und am Ausgang ein Leerlauf besteht ($\underline{I_a} = 0$).

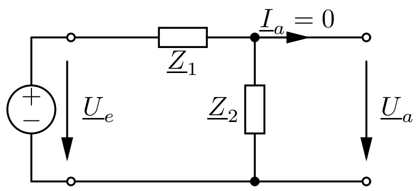


Abbildung 4.3.: *Passives Zweitor bestehend aus zwei Impedanzen mit idealer Spannungsquelle am Eingang mit Leerlauf am Ausgang.*

Da alle beteiligten Komponenten lineare Zweipole sind, muss die Ausgangsspannung proportional zur Eingangsspannung sein:

$$\underline{U_a} = \underline{v}\, \underline{U_e}$$

Dabei ist die komplexe, frequenzabhängige Grösse $\underline{v}$ die *Verstärkung* oder *Übertragungsfunktion* des Zweitors. Deren Betrag ergibt den *Amplitudengang* und deren Phase den *Phasengang* des Zweitors.

Nach der Spannungsteilerregel gilt für Abb. 4.3:

$$v = \frac{\underline{U_a}}{\underline{U_e}} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} \tag{4.1}$$

Hochpass

Ist $\underline{Z_1}$ in 4.1 eine Kapazität und $\underline{Z_2}$ ein Widerstand R, so erhalten wir

$$\underline{v} = \frac{\underline{U_a}}{\underline{U_e}} = \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + R}$$

und somit für den Betrag der Verstärkung

$$v = |\underline{v}| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}}$$

und für die Phase

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Für tiefe Frequenzen ($\omega \to 0$) ist die Verstärkung 0, für hohe Frequenzen ($\omega \to \infty$) hingegen nahezu 1.

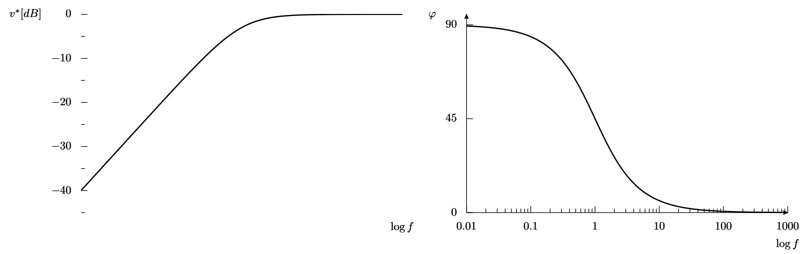


Abbildung 4.4.: *Bodediagramm, Amplitudengang (links) und Phasengang (rechts) eines RC Hochpasses*

Die Frequenz $f_{min} = \omega_{min}/2\pi$, wobei $w_{min} = \frac{1}{RC}$, ist die untere *Grenzfrequenz*. Es gilt

$$v_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Oberhalb der Grenzfrequenz ist der Betrag der Verstärkung des RC-Hochpasses näherungsweise 1.

Man benutzt im Normalfall

$$v^* = 20 \cdot \lg v \quad [\text{db}]$$

Bemerkung. Man kann auch einen Hochpass mit $\underline{Z}_1 = R$ und $\underline{Z}_2 = L$ oder $\underline{Z}_1 = C$ und $\underline{Z}_2 = L$ erzeugen.

Tiefpass

Setzen wir $\underline{Z}_1 = R$ und $\underline{Z}_2 = C$, so erhalten wir einen *RC Tiefpass*. Hier gilt:

$$\underline{v} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

und somit für den Betrag der Verstärkung

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

und für die Phase

$$\varphi = -\arctan(\omega RC)$$

und die obere Grenzfrequenz

$$\omega_{max} = 2\pi f_{max} = \frac{1}{RC}$$

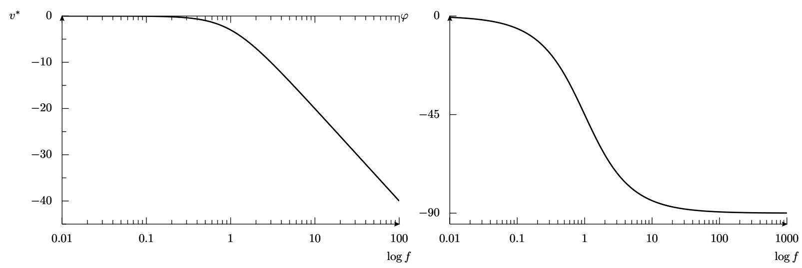


Abbildung 4.5.: *Bodediagramm, Amplitudengang (links) und Phasengang (rechts) eines RC Tiefpasses*

Bemerkung. Man kann auch einen Tiefpass mit $\underline{Z}_1 = L$ und $\underline{Z}_2 = R$ oder $\underline{Z}_1 = L$ und $\underline{Z}_2 = C$ erzeugen.

4.6. Ortskurven

Man kann Serie- und Parallelschaltung von Impedanzen bzw. Admittanzen für verschiedene Frequenzen oftmals bequem grafisch betrachten. Dafür verwendet man die komplexe Impedanz- bzw. Admittanzebene, für das Abzeichnen von Zweipolen gelten folgende Regeln:

1. Für einen *Widerstand* gilt $\underline{Z} = R$. Folglich ist die Ortskurve des Widerstandes in der komplexen Impedanzebene ein einfacher Punkt auf der reellen Achse: Die Impedanz ist frequenzunabhängig. Dasselbe gilt natürlich auch für die Darstellung von Widerstand und Leitwert in der komplexen Admittanzebene.

2. Für eine *Induktivität* gilt $\underline{Z} = j\omega L$. Dadurch wird die positive imaginäre Achse der Impedanzebene beschrieben. Als Spezialfälle erhält man $\underline{Z} = 0$ für $\omega = 0$ und $\underline{Z} = j\infty$ für $\omega = \infty$. Auch in der komplexen Admittanzebene ergibt sich aus $\underline{Y} = 1/(j\omega L) = -j/(\omega L)$ eine gerade Ortskurve, diesmal jedoch die negative imaginäre Achse mit den speziellen Punkten $-j\infty$ für $\omega = 0$ und $\underline{Y} = 0$ für $\omega = \infty$.

3. Für die *Kapazität* fällt die Ortskurve in der Impedanz- bzw. Admittanzebene mit der negativen bzw. positiven imaginären Achse zusammen.

Impedanzen kann man nun einfach addieren: Einfach die imaginär Teile und real Teile zusammenzählen. Für die Inversion also das Umwandeln von Impedanz in Admittanz oder umgekehrt wird es etwas komplizierter: Die Inversion ist aber eine konforme Abbildung, d.h. sie ist winkeltreu und Kreise werden in Kreise abgebildet. Ein Spezialfall sind Geraden, welche als Kreise durch ∞ angenommen werden.

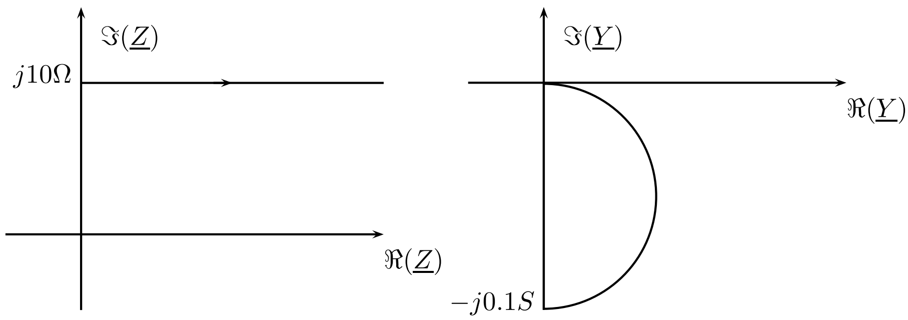


Abbildung 4.6.: *Beispiel einer Inversion einer Ortskurve*

5. Halbleiterschaltungen

5.1. Diode

Halbleiter bestehen aus einer einfachen pn Struktur, d.h. aus einer p (positiv) und n (negativ) dotierten Halbleiterschicht.

5.1.1. Gleichrichterschaltung

Die ideale Diode ist ein idealer *Gleichrichter*, d.h. sie lässt Strom nur in einer Richtung durch.

Die wichtigste Anwendung ist die Umwandlung von Wechsel- in Gleichstrom. Nehmen wir an, es stehe eine Wechselspannungsquelle $u_q(t) = \hat{U}_q \sin(\omega t)$ zur Verfügung. Verbinden wir einen Anschluss der Wechselspannungsquelle mit einer idealen Diode, so erhalten wir am Ausgang der Diode eine zeitlich veränderliche Spannung $u(t)$, deren Vorzeichen stets positiv ist. Es gilt:

$$u(t) = u_q(t), \text{ falls } u_q(t) > 0 \text{ und andernfalls } u(t) = 0$$

Will man die zeitabhängigen Anteile unterdrücken, so kann man einen Tiefpass nachschalten. Dessen Grenzfrequenz sollte möglichst weit unterhalb der Grundfrequenz ω liegen.

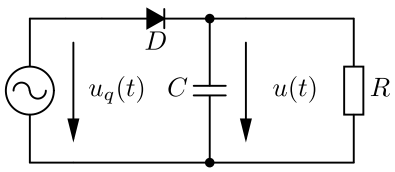


Abbildung 5.1.: *Gleichrichtung mit einer Diode D und nachfolgender Glättung mit einer Kapazität C, Lastwiderstand R.*

Ein Mangel der sogenannten *Einweggleichrichter* mit einer einzigen Diode ergibt sich aus der Tatsache, dass die Wechselspannung nur während der positiven Halbperiode belastet wird. Abhilfe schafft der *Brückengleichrichter* (Abb. 5.2), welcher aus 4 Dioden besteht.

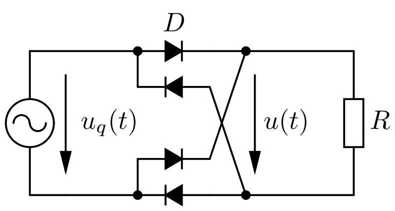


Abbildung 5.2.: *Gleichrichtung mit einem Brückengleichrichter bestehend aus 4 Dioden D mit Lastwiderstand R.*

Für den idealen Brückengleichrichter gilt:

$$u(t) = |u_q(t)|$$

5.1.2. Logische Schaltungen

Bei der elektronischen Realisierung binärer logischer Schaltungen wird meist der logische Wert 1 durch eine Spannung oberhalb einer bestimmten Schwelle U_1 und der logische Wert 0 durch eine Spannung unterhalb einer bestimmten Schwelle U_0 (mit $U_0 < U_1$) beschrieben.

Logische Schaltungen lassen sich mit Netzwerken von Schaltern realisieren.

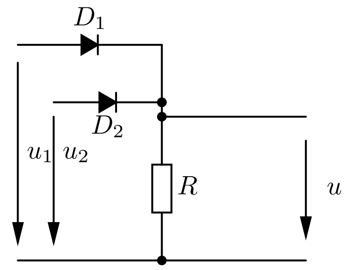


Abbildung 5.3.: *ODER-Schaltung mit zwei Dioden und einem Widerstand.*

Für ideale Dioden ergibt sich

$$u = \max(u_1, u_2)$$

Stellt u_1 oder u_2 eine logische 1 dar, d.h. gilt

$$(u_1 > U_1) \text{ ODER } (u_2 > U_1)$$

so wird auch $u > U_1$, also eine logische 1. Umgekehrt erhält man eine logische 0 wenn an beiden Eingängen logische Nullen gesetzt sind.

5.2. Bipolare Transistoren

Bipolar-Transistoren bestehen aus drei Schichten, entweder in der Reihenfolge pnp oder npn. Die beiden äusseren Schichten werden *Kollektor* bzw. *Emitter* genannt, die mittlere Schicht ist die *Basis*.

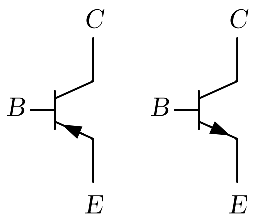


Abbildung 5.4.: *pnp- (links) und npn-(rechts) Transistor*

Im Normalbetrieb wird die Basis-Emitter-Strecke im Durchlass und die Basis-Kollektor-Strecke im Sperrbereich betrieben. Die Basis-Emitterstrecke verhält sich daher wie eine Diode in Durchlaufrichtung (die Pfeilrichtung gibt die Diodenrichtung an). Der positive Basisstrom fliesst beim npn-Transistor in die Basis hinein, beim pnp-Transistor heraus. Fliesst ein Basisstrom, so fallen über der Basis-Emitter-Strecke ca. $0.7V$ ab. Dies ist ein geschätzter Wert und kann genau bestimmt werden mit

$$I_B = I_S(\exp(U_{BE}/U_T) - 1) \qquad U_T \text{ und } I_S \text{ aus Datenblatt}$$

Der Basisstrom ist der Steuerstrom. Mit ihm steuert man den Kollektorstrom, sofern eine positive Kollektor-Emitterspannung anliegt. Der Kollektorstrom ist dann näherungsweise proportional zum Basisstrom.

Zwischen I_B und I_C herrscht in guter Näherung Proportionalität:

$$I_C = h_{fE} I_B$$

In Abbildung 5.5 ist die Ausgangskennlinie $I_C = f(U_{CE})$ dargestellt. Man sieht, dass ab einer minimalen Spannung U_{CE} der Kollektorstrom I_C praktisch nicht mehr von U_{CE} abhängt, sondern nur noch vom Basisstrom I_B.

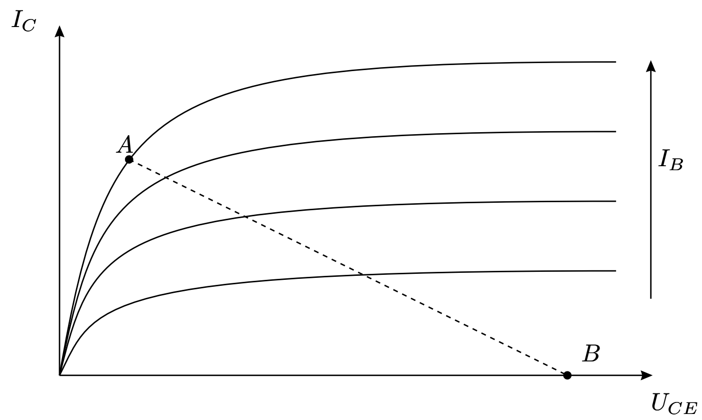


Abbildung 5.5.: *Kennlinienfeld eines Transistors*

5.2.1. Grosssignal

Ein einfaches Modell, welches das Verhalten eines bipolaren npn-Transistors bei Gleichstrom (und bei langsamen Vorgängen) in erster Näherung beschreibt, ist das folgende

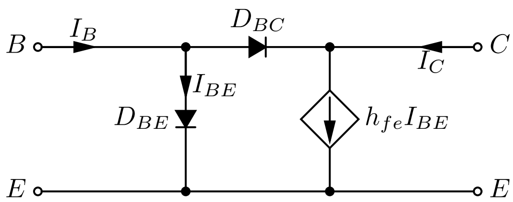


Abbildung 5.6.: *Einfaches Grosssignal-Ersatzschemata des npn bipolaren Transistors. Beim pnp-Transistor sind die Stromrichtungen und die Polaritäten der Dioden umgekehrt.*

Es können folgende Betriebsarten unterschieden werden:

Cutoff-Bereich Beide Dioden sind gesperrt, insbesondere die Basis-Emitter Diode: U_{BE} ist positiv bei pnp-, negativ bei npn-Transistoren. Es fliesst kein Strom vom Emitter in die Basis und daher fliesst auch kein Kollektorstrom; man befindet sich im Punkt B auf der Kennlinie.

Sättigungs-Bereich Beide Dioden sind leitend. Die Kollektor-Emitterspannung kann zwar nicht negativ werden, sie ist aber sehr klein ($\approx 0.3V$) und man befindet sich im Punkt A. Es gilt

$$I_C < h_{fE} I_B$$

Ein Teil des Kollektorstromes fliesst durch die Stromquelle, der andere durch die Diode zur Basis.

Aktiver Bereich Die Basis-Emitter Diode ist leitend, während die Kollektor-Basis Diode gesperrt ist. In diesem Arbeitsbereich funktioniert der Transistor als Verstärker. Die Diode D_{BC} kann weggelassen werden.

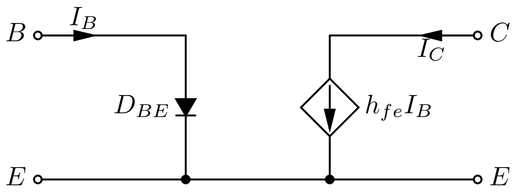


Abbildung 5.7.: *Ersatzschaltung des npn bipolaren Transistors im aktiven Bereich*

5.2.2. Der Transistor als Schalter

In dieser Funktionsart wird der Transistor entweder im Cutoff (Transistor ausgeschaltet, Punkt B) oder in der Sättigung (Transistor eingeschaltet, Punkt A) betrieben.

5.2.3. Der Transistor als Verstärker

Bei jedem Wert des Eingagangsstromes I_B muss der Transistor dabei im aktiven Bereich bleiben. Dafür definiert man einen *Arbeitspunkt*, um den herum die Strom- bzw. Spannungsänderungen erfolgen.

Solange die Eingangsspannungsänderung an der BE-Diode klein ist (sogenanntes *Kleinsignalverhalten*), kann die Kennlinie um den Arbeitspunkt (I_{CE}, U_{CE0}) herum als annäherend linear betrachtet werden und durch ihre Tangente an diesem Punkt beschrieben werden.

Wir definieren die *differentiellen Kenngrössen*:

$$r_{BE} = \left.\frac{\partial U_{BE}}{\partial I_B}\right|_{U_{CE}=const} \approx \frac{U_T}{I_B}$$

$$r_{CE} = \left.\frac{\partial U_{CE}}{\partial I_C}\right|_{U_{BE}=const}$$

r_{CE} bezeichnet die Steigung der Ausgangskennlinie im Arbeitspunkt.

Kleinsignalverhalten

Da für das *Kleinsignalverhalten* des Transistors annähernd lineare Verhältnisse vorausgesetzt werden können, wird oft das folgende Ersatzschaltbild verwendet.

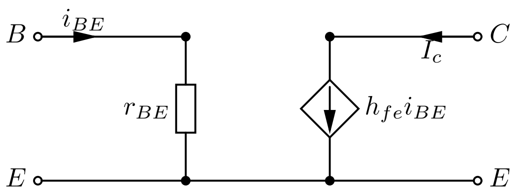


Abbildung 5.8.: *Kleinsignalersatzschaltbild des npn-Transistors*

Die Berechnung von Transistorschaltungen vereinfacht sich dadurch wesentlich, weil dank der Linearität der Ersatzschaltung das Superpositionsprinzip angewendet werden kann: Quellen können separat betrachtet werden.

5.2.4. Grundschaltungen mit Bipolartransistoren

	Emitterschaltung	Kollektorschaltung	Basisschaltung
Spannungsverstärkung V_u	> 1	≈ 1	> 1
Stromverstärkung V_i	> 1	> 1	≈ 1
Eingangswiderstand r_e	mittel	sehr hoch	sehr klein
Ausgangswiderstand r_a	hoch	sehr klein	hoch

Tabelle 5.1.: *Vergleich zwischen den verschiedenen Betriebsarten eines Transistor*

5.2.5. Emitterschaltung

Der Arbeitspunkt kann entweder über den Basisstrom I_B oder über die Basis-Emitter Spannung U_{BE} festgelegt werden. Hier wird der Fall mit Festlegung von I_B betrachtet.

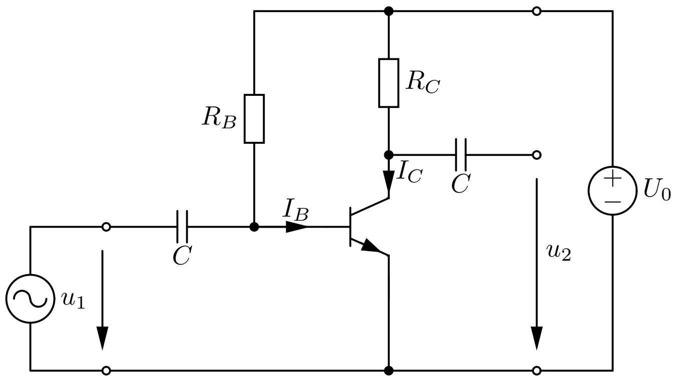


Abbildung 5.9.: *Emitterschaltung als Grundbeschaltung eines bipolaren Transistors. Die beiden Kapazitäten dienen der Ein- bzw. Auskopplung des Wechselspannungssignals. Sie werden üblicherweise so gross dimensioniert, dass sie bei der Berechnung des Kleinsignalverhaltens weggelassen werden können.*

Die Arbeitspunktgrössen werden im folgenden mit Grossbuchstaben und Index 0 gekennzeichnet. Es gilt also

$$I_B = I_{B0} + i_B, \qquad U_{CE} = U_{CE0} + u_{CE} \qquad \text{usw.}$$

1. **Berechnung des Arbeitspunktes**: Die Wechselspannungsquelle wird Null gesetzt. Somit sind nur die Gleichströme zu berücksichtigen. Die Kapazitäten werden als Unterbruch betrachtet. Unter Berücksichtigung des Grosssignal-Ersatzschemas erhält man folgende Schaltung, wenn man beachtet, dass die Basis-Kollektor Diode sperrt und deshalb in guter Näherung weggelassen werden kann.

   Weil die Basis-Emitter Diode im Durchlassbereich arbeitet, können wir in guter Näherung $U_{BE} = 0.7V$ schreiben und erhalten:

   $$I_{B0} = (U_0 - 0.7V)/R_B$$

   Bei vorgegebenen Arbeitspunkt z.B. $I_{B0} = 60\mu A$ kann diese Gleichung auch nach R_B aufgelöst werden. Auf diese Weise wird der Widerstand R_B, welcher den Basisstrom und damit den Arbeitspunkt festlegt dimensioniert.

   Die Kollektor-Emitter Spannung ergibt sich aus folgender Spannungsteilerrechnung:

   $$U_{CE0} = U_0 - R_C I_{C0} = U_0 - R_C h_{fE} I_{B0}$$

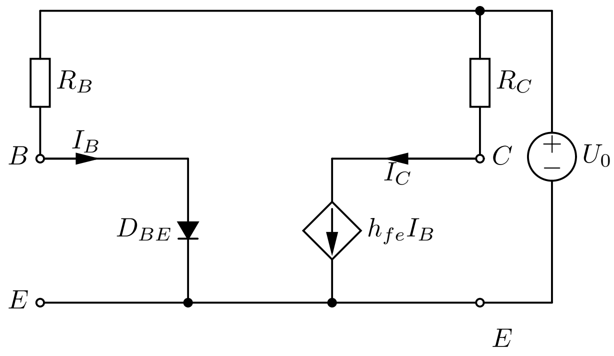


Abbildung 5.10.: *Ersatzschaltung für den Gleichstromfall.*

2. **Berechnung der Wechselspannungsgrössen**: Hier wird die Speisespannungsquelle U_0 Null (= Kurzschluss) gesetzt. Setzen wir für den Transistor die Kleinsignal-Ersatzschaltung ein, so erhalten wir die Ersatzschaltung gemäss Figur 5.11.

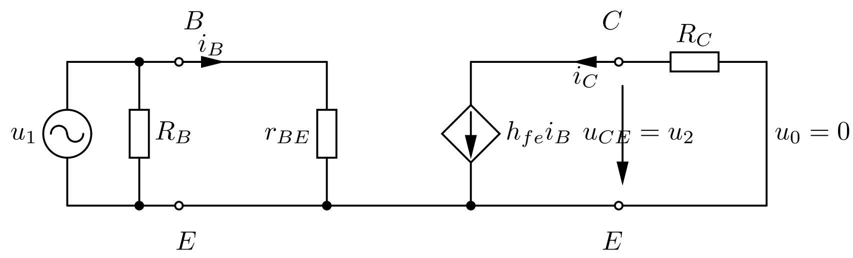


Abbildung 5.11.: *Ersatzschaltung für den Wechselspannungsfall (Kleinsignalverstärkung).*

Für den Eingangskreis sowie die gesteuerte Stromquelle im Ausgangskreis gilt:

$$i_B = u_1/r_{BE}, \qquad i_C = h_{fE}i_B, \qquad u_{CE} = -R_C i_C$$

Durch Einsetzen folgt die Ausgangsspannung

$$u_2 = u_{CE} = -u_1 h_{fE} R_C / r_{BE}$$

Daraus ergibt sich schliesslich die Spannungsverstärkung

$$v = u_2/u_1 = -h_{fE} R_C / r_{BE}$$

5.2.6. Gegenkopplung

Um die Linearität einer einzelnen Verstärkerstufe und die Stabilität des Arbeitspunktes zu verbessern, wird gerne ein Teil des Ausgangssignals an den Eingang zurückgeführt und zwar so, dass die Phase des zurückgeführten Ausgangssignals gegenüber der Phase des Eingangssignals um 180 Grad verschoben ist. Damit wirkt das rückgeführte Ausgangssignal dem Eingangssignal entgegen und vermindert die Verstärkung; dies wird Gegenkopplung genannt.

Um eine Gegenkopplung bei der Emitterschaltung zu bewerkstelligen, ist keine Phasendrehung nötig, da die Ausgangsspannung der Emitterschaltung gegenüber der Eingangsspannung bereits um 180 Grad phasenverschoben ist. Man kann also lediglich einen Teil der Ausgangsspannung mit einem Spannungsteiler vom Kollektor abnehmen und an die Basis zurückführen. Im wesentlichen wird diese sogenannte *Spannungsgegenkopplung* durch einen Widerstand vom Kollektor zur Basis bewerkstelligt.

Die Stromgegenkopplung bei der Emitterschaltung besteht aus einem Widerstand R_E zwischen Emitter und Masse.

Die Wirkungsweise der Stromgegenkopplung ist die folgende: Nimmt die Eingangsspannung zu, so nimmt der Kollektorstrom und damit der Emitterstrom zu, welcher nahezu gleich dem Kollektorstrom ist. Damit steigt die Spannung über R_E und die Basis-Emitter Spannung wird reduziert, weil

$$U_{Ein} = U_{BE} + U_{R_E}$$

gilt.

5.2.7. Kollektorschaltung, Emitterfolger

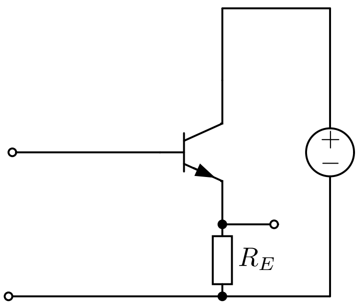


Abbildung 5.12.: *Prinzip der Kollektorschaltung*

Die Spannungsverstärkung ist ungefähr $v = 1$. Interessant ist diese Schaltung wegen ihres hohen Eingangswiderstandes

$$r_e = r_{BE} + h_{fE} R_E$$

bei relativ niedrigem Ausgangswiderstand für den gilt

$$r_a \approx \frac{r_{BE} + R_i}{h_{fE}}$$

Wobei R_i der Innenwiderstand der Spannungsquelle ist, die die Kollektorschaltung speist. Man kann die Kollektorschaltung deshalb als Impedanzwandler verwenden.

5.2.8. Basisschaltung

Bei der Basisschaltung liegt die Basis auf Masse. Wie bei der Emitterschaltung wird der Kollektor über einen Widerstand mit der Gleichspannungsquelle verbunden. Ausserdem ist u_{BE} - wie bei der Emitterschaltung - die Eingangsspannung. Die Basisschaltung hat auch dieselbe Spannungsverstärkung wie die Emitterschaltung, die Ausgangsspannung ist jedoch in Phase mit der Eingangsspannung. Der wichtigste Unterschied zur Emitterschaltung ist der geringe Eingangswiderstand.

5.3. Operationsverstärker

Bei Operationsverstärkern will man normalerweise sowohl positive als auch negative Signalspannungen verarbeiten können. Aus diesem Grunde werden Operationsverstärker normalerweise mit einer positiven und einer negativen Speisespannung versorgt. Diese Spannungen sind entgegengesetzt gleich und limitieren den Arbeitsbereich.

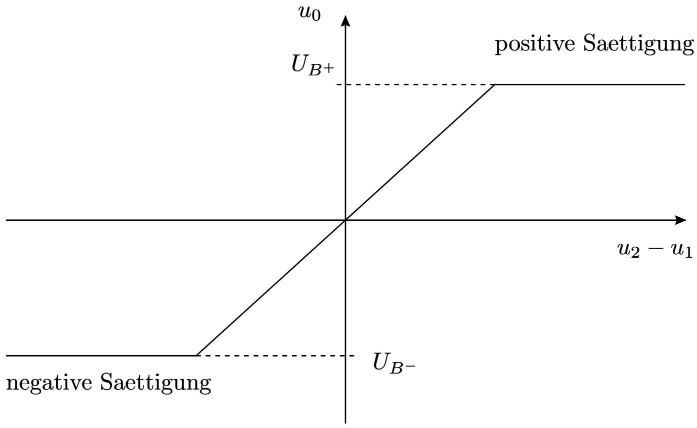


Abbildung 5.13.: *Idealisierte DC-Übertragungscharakteristik eines Operationsverstärkers*

Verstärker, deren Spannungsverstärkung v einen negativen Wert aufweisen nennt man *Invertierer* . Der Operationsverstärker verfügt über einen invertierenden und einen nicht invertierenden Eingang. Die Ausgangsspannung ist proportional zur Differenz der beiden Eingangsspannungen, d.h. der Operationsverstärker ist ein *Differenzverstärker*.

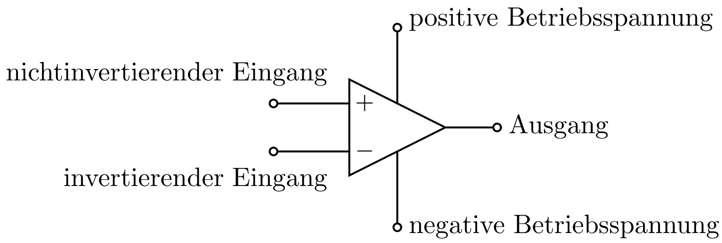


Abbildung 5.14.: *Schaltung eines Operationsverstärkers.*

5.3.1. Grundlegende Überlegungen

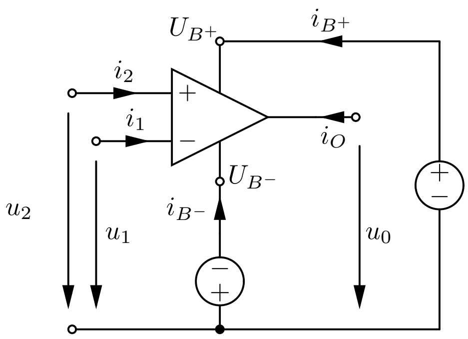


Abbildung 5.15.: *Klemmenspannungen und -ströme eines Operationsverstärkers.*

Für die folgende Rechnung gehen wir immer davon aus, dass die Ströme in den Operationsverstärker hinein fliessen.

Zunächst muss natürlich die Ausgangsspannung im Bereich $U_{B-} \ldots U_{B+}$ liegen. Damit der OpAmp im linearen Bereich und nicht in der Sättigung arbeitet, muss die Differenz der Eingangsspannungen genügend klein sein, weil für die Ausgangsspannungen

$$u_0 = A(u_2 - u_1)$$

gilt, wobei die Spannungsverstärkung ohne externe Beschaltung A sehr gross ist. Normalerweise ist A sogar so gross (10000 und mehr), dass man für die Berechnung in guter Näherung

$$u_2 = u_1$$

setzen kann.
Da die Eingangswiderstände der beiden Eingänge sehr hoch sind, kann man die Eingangsströme meist vernachlässigen, d.h.

$$i_2 = i_1 = 0$$

setzen.

Der Eingangswiderstand eines Operationsverstärker ist unendlich gross, auch kann er als ideale Spannungsquelle angesehen werden, sein Innenwiderstand ist also gleich Null; somit spielt der Lastwiderstand keine Rolle.

5.3.2. Vorgehen bei Berechnungen mit einem Operationsverstärker

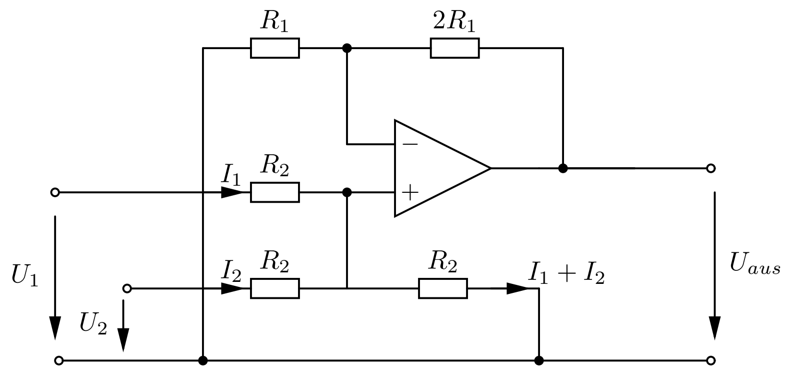


Abbildung 5.16.: *Beispiel für die Vorgehensweise*

1. Eingangsspannungen aufstellen. Für das Beispiel müssen wir also die Spannung U_+ am nicht-invertierenden Eingang bestimmen. Dies tun wir indem wir die Spannungen mit den Strömen ausdrucken. Was stets zu beachten ist, ist dass kein Strom in den Operationsverstärker hinein fliesst. Für das Beispiel ergibt sich:

$$\begin{aligned} U_1 &= I_1 \cdot R_2 + (I_1 + I_2) \cdot R_2 \\ U_2 &= I_2 \cdot R_2 + (I_1 + I_2) \cdot R_2 \\ U_+ &= (I_1 + I_2) R_2 = \frac{U_1 + U_2}{3} \end{aligned}$$

2. Benutzen der Gleichung $U_1 = U_2$ und der Tatsache, dass kein Strom in den Operationsverstärker hineinfliesst. Dafür benutzt man am Besten eine Ersatzskizze.

   Es muss gelten

$$I_i = I_o$$

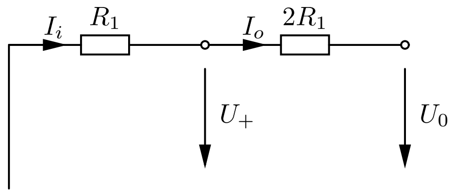


Abbildung 5.17.: *Ersatzskizze*

Umgeschrieben

$$\frac{-U_+}{R_1} = \frac{U_+ - U_0}{2R_1}$$

Daraus kann man jetzt die Ausgangsspannung in Abhängigkeit der Eingangsspannungen berechnen.

5.3.3. Beschalteter Operationsverstärker

Meist verwendet man eine *Gegenkopplung*, d.h. das Ausgangssignal wird über einen Zweipol oder ein Netzwerk an den invertierenden Eingang zurück geführt. Geschieht die Gegenkopplung über einen einfachen Widerstand, so wird mit diesem im wesentlichen die Verstärkung eingestellt.

Bei vielen Anwendungen wird der nicht invertierende Eingang auf Masse gelegt und das Eingangssignal über einen Zweipol oder ein Netzwerk dem invertierenden Eingang zugeführt. Dadurch wird die Schaltungsanalyse besonders einfach, weil man dann für den invertierenden Eingang $i_1 = 0$ und $u_1 = 0$ setzen kann und den nicht invertierenden Eingang für die weitere Rechnung ignorieren kann.

5.3.4. Invertierender Verstärker

Setzen wir den nicht invertierenden Eingang auf Masse und führen wir das Eingangssignal dem invertierenden Eingang über einen Ohm'schen Widerstand R_s zu, so erhalten wir einen invertierenden Verstärker mit praktisch frequenzunabhängiger Verstärkung. Mit Hilfe eines Gegenkopplungswiderstandes R_f können wir die Spannungsverstärkung auf einen nahezu beliebigen Wert einstellen.

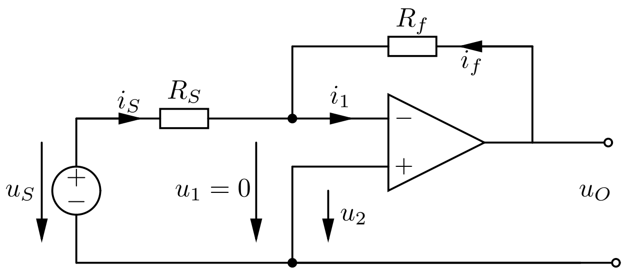


Abbildung 5.18.: *Invertierender Verstärker*

Wegen $i_1 = 0$ gilt offenbar $i_S = -i_f$. Setzen wir das Ohm'sche Gesetz für die beiden Widerstände ein, so folgt wegen $u_1 = 0$ sofort

$$v = u_O/u_S = -R_f/R_S$$

Für eine analoge Inversion, d.h. Vorzeichenumkehr des Eingangssignals setzt man $R_f = R_S$ und erhält mit $v = -1$ sofort $u_O = -u_S$.

5.3.5. Nichtinvertierender Verstärker

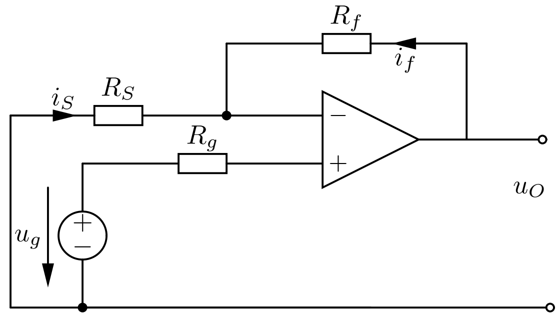


Abbildung 5.19.: *Nicht-invertierender Verstärker*

Die Signalspannungsquelle u_g mit dem Innenwiderstand R_g wird mit dem nicht invertierenden Eingang verbunden. Die Spannungsverstärkung v wird mit einem Gegenkopplungswiderstand R_f vom Ausgang zum invertierenden Eingang eingestellt; den invertierenden Eingang legen wir über einen Widerstand R_S auf Masse.

$$v = 1 + \frac{R_f}{R_g}$$

5.3.6. Addierer

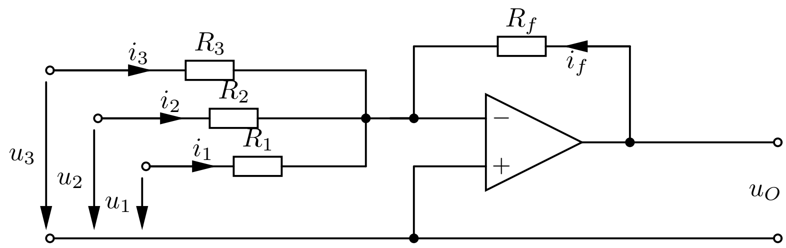


Abbildung 5.20.: *Addierer*

Verbindet man mehrere Eingangsspannungsquellen über Widerstände mit dem invertierenden Eingang und verwendet man ausserdem dasselbe Schema wie beim invertierenden Verstärker, so ergibt sich dieselbe Rechnung wie beim invertierenden Verstärker, wenn man i_S durch die Summe der Eingangsströme ersetzt. Z.B. gilt für drei Eingänge:

$$i_S = i_1 + i_2 + i_3$$

Daraus ergibt sich

$$u_O = -R_f \left(\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_3}{R_3} \right)$$

Setzt man

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_f$$

So wird offenbar die Ausgangsspannung bis auf das Vorzeichen gleich der Summe der Eingangsspannungen. Um das Vorzeichen zu korrigieren, ist also nur noch ein invertierender Verstärker mit Spannungsverstärkung $v = -1$ erforderlich. Zur analogen Addition von beliebig vielen Grössen reichen also zwei Operationsverstärker.

5.3.7. Subtrahierer

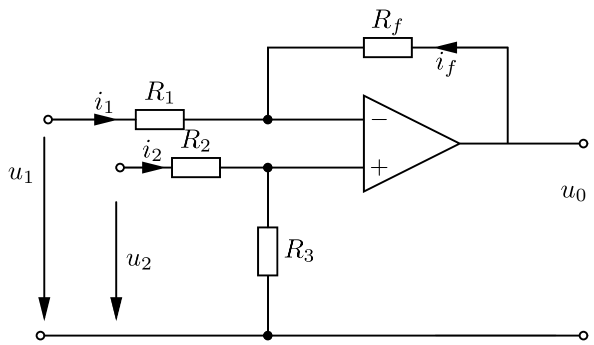


Abbildung 5.21.: *Subtrahierer*

Für $R_2 = R_1 = R_3 = R_f$ finden wir

$$u_O = u_2 - u_1$$

5.3.8. Analoge Integration

Für die Kapazität gilt bekannterweise $i = C\partial u/\partial t$. Die Spannung u über der Kapazität ist somit das Integral über den Strom i.

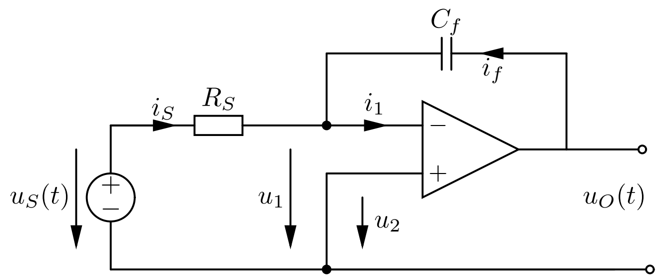


Abbildung 5.22.: *Integration*

Für u_O ergibt sich, falls der Kondensator zur Zeit t_0 ungeladen war:

$$u_O(t) = -\frac{1}{R_S C_f}\int_{t_0}^{t} u_S(t')dt'$$

D.h. die Ausgangsspannung ist das mit dem Faktor $-\frac{1}{R_S C_f}$ skalierte Integral der Eingangsspannung. Um das negative Vorzeichen loszuwerden, kann man wieder einen Inverter nachschalten.

5.3.9. Analoge Differentiation

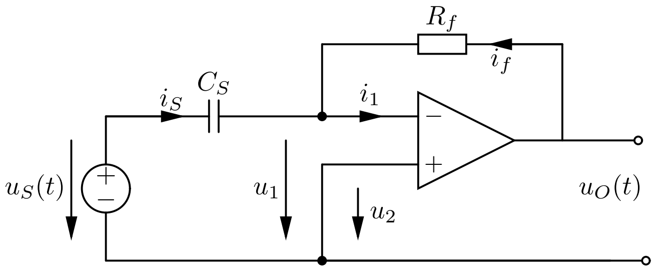


Abbildung 5.23.: *Differentiation*

Man findet dafür

$$u_O(t) = -C_S R_f \frac{\partial u_S}{\partial t}$$

5.4. Digitale Schaltungen

5.4.1. Inverter

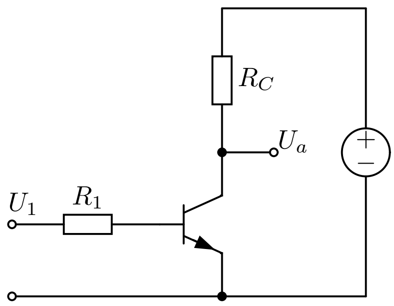


Abbildung 5.24.: *Einfacher Inverter in RTL Ausführung*

Ist die Eingangsspannung U_1 kleiner als etwa $0.6V$ bei einem Siliziumtransistor, so sperrt dieser, d.h. der Kollektorstrom wird klein und U_a wird nahezu gleich der Versorgungsspannung, d.h. gross. Ist umgekehrt U_1 gross, so leitet der Transistor und U_a wird klein.

5.4.2. NAND und NOR

Schaltungstechnisch sind die negierten UND und ODER Verknüpfungen, NAND und NOR, einfach zu realisieren. Daraus kann man alle logischen Verknüpfungen durch passende Kombination von NAND und NOR erzeugen.

NOR

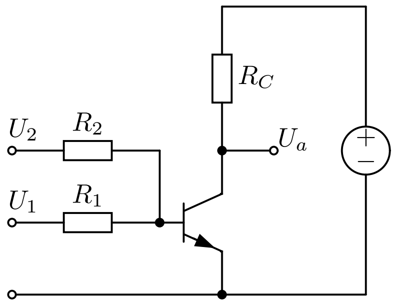


Abbildung 5.25.: *Einfacher NOR Gatter in RTL Ausführung*

Offenbar leitet der Transistor wenn wenigstens eine der beiden Eingangsspannungen hoch ist, so dass die Ausgangsspannung dann tief wird. Die Ausgangsspannung ist nur dann hoch, wenn beide Eingänge tief sind.

NAND

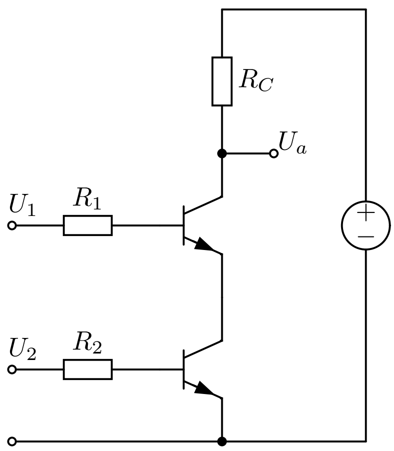


Abbildung 5.26.: *Einfacher NAND Gatter in RTL Ausführung*

Ist beispielsweise U_2 hoch, so leitet der über R_2 angesteuerte Transistor. Damit ein Kollektorstrom fliessen kann, muss aber auch der andere Transistor leiten. U_a wird also nur dann tief, wenn beide Eingangsspannungen hoch sind.

6. Leitungen

6.1. Zweidrahtleitungen

6.1.1. Leitungsbeläge

Man versucht die Leitung durch folgende Grössen zu beschreiben, die man im Normalfall numerisch oder experimentell bestimmt:

$$C', \quad G', \quad R', \quad L'$$

und z bezeichnet den Ort auf der Leitung.

6.1.2. Leitungswellen

Von den sogenannten Telegraphengleichungen kommt man auf die entkoppleten Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial z^2} &= (R'G' + j\omega(R'C' + L'G') - \omega^2 L'C')\underline{U} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C')\underline{U} \\
\frac{\partial^2 \underline{I}}{\partial z^2} &= (R'G' + j\omega(R'C' + L'G') - \omega^2 L'C')\underline{I} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C')\underline{I}
\end{aligned}$$

Diese Differentialgleichungen zweiter Ordnung haben Lösungen der Form

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_0^+ e^{-\gamma z} + \underline{U}_0^- e^{+\gamma z}; \qquad \underline{I}(z) = \underline{I}_0^+ e^{-\gamma z} + \underline{I}_0^- e^{+\gamma z}$$

Dabei ist die komplexe Grösse $\gamma = \alpha + j\beta$ die *Fortpflanzungskonstante*. Wir finden

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$$

Der Realteil α wird *Dämpfungskonstante*, der Imaginärteil β *Phasenkonstante* genannt.

$$u(z,t) = \Re(\underline{U}_0^+ e^{j\omega t - \gamma z} + \underline{U}_0^- e^{j\omega t + \gamma z}); \qquad i(z,t) = \Re(\underline{I}_0^+ e^{j\omega t - \gamma z} + \underline{I}_0^- e^{j\omega t + \gamma z})$$

Die Terme mit positivem oberem Index beschreiben eine Welle, welche sich mit zunehmender Zeit t in *positive* z Richtung ausbreitet sofern β positiv ist. Wählt man die z Richtung so, dass die z Achse von der Signalquelle zum Verbraucher zeigt, so kennzeichnen die positiven oberen Indices die *hinlaufende Welle*, die negativen Indices hingegen die *rückläufigen Wellen*. Ist die Dämpfungskonstante positiv, so nehmen die hinlaufenden Wellen exponentiell mit zunehmendem z ab.
Die rückläufigen Wellen breiten sich in $-z$ Richtung aus und zwar mit derselben Phasenkonstanten und demselben Dämpfungsfaktor wie die hinlaufenden Wellen.

6.1.3. Phasengeschwindigkeit

Bedingung für Orte gleicher Phase:

$$\beta z = \omega t \text{ oder } z = (\omega/\beta)t$$

Diese Orte bewegen sich mit der *Phasengeschwindigkeit*

$$v_p = \omega/\beta$$

in z Richtung. Dasselbe gilt auch für die Ströme.

6.1.4. Charakteristische Impedanz Z_0

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

Dieser Wert hat die Dimension einer Impedanz und ist charakteristisch für jede Zweidrahtleitung. Man nennt $\underline{Z}_0$ deshalb *charakteristische Impedanz* oder *Wellenimpedanz*. Für die rücklaufende Welle ergibt sich dieselbe charakteristische Impedanz wie für die hinlaufende Welle.

6.1.5. Verlustfreie Leitungen

Sind die Leitungsverluste vernachlässigbar, so kann man $R' = 0$ und $G' = 0$ einsetzen und erhält wesentlich vereinfachte Gleichungen. So gilt für die Fortpflanzungskonstante

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{L'C'}$$

Die Dämpfungskonstante α verschwindet also. Die entsprechenden Wellen breiten sich also ungedämpft aus und die Amplituden am Leitungsende sind ebenso gross wie am Leitungsanfang. Für die Phasengeschwindigkeit erhält man

$$v_p = \omega/\beta = 1/\sqrt{L'C'}$$

Auch die charakteristische Impedanz vereinfacht sich:

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Offensichtlich wird diese Grösse reell - wie ein Ohm'scher Widerstand.

6.1.6. Phasengeschwindigkeit und Wellenlänge

Es gilt der einfache Zusammenhang zwischen Phasenkonstante und Wellenlänge

$$\lambda = 2\pi/\beta$$

Da die exakte Berechnung der Wellenlänge nicht einfach ist, verwendet man für grobe Abschätzungen die Freiraumwellenlänge λ_0, welche sich aus der Lichtgeschwindigkeit (ca. $3 \cdot 10^8$ m/s) gemäss

$$\lambda_0 = c/f = 2\pi c/\omega$$

berechnen lässt.

6.2. Stossstellen und Abschlüsse

Verbindet man unterschiedliche Leitungen miteinander, so treten vor allem am Übergang (Stossstelle) Phänomene auf.

6.2.1. Stossstellen von Zweidrahtleitungen

Werden zwei Leitungen an einer Stossstelle ($z = 0$) verbunden und sind die charakteristischen Impedanzen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ der beiden Leitungen unterschiedlich, so wird nicht die ganze Welle *transmittiert* sondern es wird auch noch eine Welle *reflektiert*. Für den Strom der transmittierten oder der reflektierten Welle in Abhängigkeit vom Strom der einfallenden Welle gilt:

$$\begin{aligned} \underline{I}_2^+(0) &= \underline{T}\,\underline{I}_1^+(0), \text{ wobei } \underline{T} = \frac{2\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} && \text{transmittierte Welle} \\ \underline{I}_1^-(0) &= \underline{\Gamma}\,\underline{I}_1^+(0), \text{ wobei } \underline{\Gamma} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} && \text{reflektierte Welle} \end{aligned}$$

Dabei ist $\underline{T}$ der *Transmissionskoeffizient* und $\underline{\Gamma}$ der *Reflexionskoeffizient*. $\underline{T} = 1$ und $\underline{\Gamma} = 0$ gilt genau dann, wenn die beiden charakteristischen Impedanzen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ gleich sind. Ist dies der Fall, so sind die Leitungen *angepasst* und es entsteht keine Reflexion an der Stossstelle.

Da sich die transmittierten Wellen mit der Fortpflanzungskonstanten γ_2 in $+z$ Richtung ausbreiten, gilt für diese

$$\underline{I}_2^+(z) = \underline{T}\,\underline{I}_1^+(0)e^{-\gamma_2 z}$$

Die reflektierten Wellen hingegen breiten sich in $-z$ Richtung aus, so dass

$$\underline{I}_1^-(z) = \underline{\Gamma}\,\underline{I}_1^+(0)e^{+\gamma_1 z}$$

6.2.2. Leitungsabschluss

Im Wechselstromfall nehmen wir an, der Sender könne durch eine Spannungsquelle $\underline{U}_q$ mit Impedanz $\underline{Z}_q$ und der Empfänger durch eine einfache Lastimpedanz $\underline{Z}_L$ dargestellt werden. Für die Reflexionskoeffizienten bei der Last bzw. Quelle gilt:

$$\underline{\Gamma}_L = \frac{\underline{Z}_L - \underline{Z}}{\underline{Z}_L + \underline{Z}}, \qquad \underline{\Gamma}_q = \frac{\underline{Z}_q - \underline{Z}}{\underline{Z}_q + \underline{Z}}$$

wobei $\underline{Z}$ die charakteristische Impedanz der Leitung ist.

Damit ergibt sich offenbar an den Leitungsenden keine Reflexion, wenn die Impedanzen *angepasst* sind, d.h. für $\underline{Z}_L = \underline{Z}$ bzw. $\underline{Z}_q = \underline{Z}$.

Totalreflexion tritt auf, wenn $\underline{\Gamma} = -1$ für $\underline{Z}_L = 0$ bzw. $\underline{Z}_q = 0$ (Kurzschluss) oder $\underline{\Gamma} = +1$ für $\underline{Z}_L = \infty$ bzw. $\underline{Z}_q = \infty$ (Leerlauf).

Für den Strom und die Spannung auf der Leitung gilt nachdem die reflektierte Welle wieder vorbei ist:

$$U = U^+ + \underbrace{\Gamma U^+}_{U^-} \qquad I = I^+ - \underbrace{\Gamma I^+}_{I^-}$$

6.2.3. Eingangsimpedanz

Betrachten wir eine <u>verlustfreie</u> Leitung ($\alpha = 0, \gamma = j\beta$) mit charakteristischer Impedanz $\underline{Z} = R$, welche auf der einen Seite durch eine sinusförmige Spannungsquelle angeregt wird und auf der anderen Seite mit einer Impedanz $\underline{Z}_L = R_L$ belastet wird. Ausserdem sei die Leitung eingangsseitig angepasst, d.h. der Innenwiderstand der Quelle sei ebenfalls R.

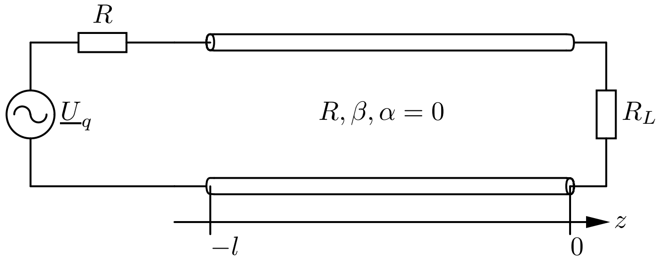


Abbildung 6.1.: *Verlustlose Leitung angeregt durch eine angepasste Wechselspannungsquelle, belastet mit einem beliebigen Widerstand.*

$$\underline{\Gamma}_L = \Gamma(0) = \frac{R_L - R}{R_L + R}$$

Die Reflexion am Lastwiderstand erzeugt eine rückläufige Welle mit $\underline{U}^-, \underline{I}^-$, welche sich der hinauflaufenden Welle mit $\underline{U}^+, \underline{I}^+$ überlagert. Damit ergibt sich für die Spannung und den Strom längs der Leitung

$$\begin{aligned}
\underline{U}(z) &= \underline{U}^+ e^{-j\beta z} + \underline{U}^- e^{+j\beta z} = \underline{U}^+ (e^{-j\beta z} + \underline{\Gamma}_L e^{+j\beta z}) = \underline{U}^+ e^{-j\beta z}(1 + \underline{\Gamma}_L e^{2j\beta z}) \\
\underline{I}(z) &= \frac{\underline{U}^+ e^{-j\beta z} - \underline{U}^- e^{+j\beta z}}{\underline{Z}} = \underline{U}^+ \frac{e^{-j\beta z} - \underline{\Gamma}_L e^{+j\beta z}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}^+}{\underline{Z}} e^{-j\beta z}(1 - \underline{\Gamma}_L e^{2j\beta z})
\end{aligned}$$

Am Eingang messen wir die *Eingangsimpedanz*

$$\underline{Z}_{in} = \frac{\underline{U}(-l)}{\underline{I}(-l)} = \frac{\underline{U}^+ (e^{+j\beta l} + \underline{\Gamma}_L e^{-j\beta l})}{\underline{I}^+ (e^{+j\beta l} - \underline{\Gamma}_L e^{-j\beta l})} = \underline{Z} \frac{e^{+j\beta l} + \underline{\Gamma}_L e^{-j\beta l}}{e^{+j\beta l} - \underline{\Gamma}_L e^{-j\beta l}}$$

Umgeformt ergibt dies:

$$\underline{Z}_{in} = \underline{Z} \cdot \frac{\underline{Z}_L + j\underline{Z} \tan(\beta l)}{\underline{Z} + j\underline{Z}_L \tan(\beta l)}$$

Die *normalisierte Reaktanz* ist definiert als:

$$\bar{X}_{in} = -j\frac{\underline{Z}_{in}}{\underline{Z}} = -j \cdot \frac{\underline{Z}_L + j\underline{Z} \tan(\beta l)}{\underline{Z} + j\underline{Z}_L \tan(\beta l)}$$

Die *normalisierte Suszeptanz* ist definiert als:

$$\bar{B}_{in} = -j\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_{in}} = -j \cdot \frac{\underline{Z} + j\underline{Z}_L \tan(\beta l)}{\underline{Z}_L + j\underline{Z} \tan(\beta l)}$$

6.2.4. Stehende Wellen

Für den Betrag der Spannung auf der Welle gilt:

$$|\underline{U}(z)| = |\underline{U}^+||1 + |\underline{\Gamma}_L| e^{j(\Phi - 2\beta z)}|$$

und für den Strom:

$$|\underline{U}(z)| = |\frac{\underline{U}^+}{\underline{Z}}||1 - |\underline{\Gamma}_L| e^{j(\Phi - 2\beta z)}|$$

Spannungsmaxima längs der Leitung treten offenbar dann auf, wenn $e^{j(\Phi-2\beta z)} = 1$ wird und Spannungsminima wenn $e^{j(\Phi-2\beta z)} = -1$.

Aus der Distanz des ersten Spannungsmaxima vom Leitungsende lässt sich die *Phase* Φ *des Reflexionsfaktors* ablesen. Ist die Abschlussimpedanz - ebenso wie die Impedanz der Leitung - reell, so wird der Reflexionsfaktor reell und somit $\Phi = 0$ wenn der Reflexionsfaktor positiv ist, und $\Phi = \pi$ wenn der Reflexionsfaktor negativ ist. Damit findet man am also am Leitungsende entweder ein Spannungsmaxima oder ein Spannungsminimum.
Aus dem Ort der Spannungsmaxima lässt sich aber auch die *Wellenlänge* auf der Leitung ablesen. Für die Distanz d benachbarter Maxima (oder Minima) gilt:

$$2\beta d = 2\pi \Rightarrow \lambda = 2d$$

Bei Totalreflexion ($\Gamma = -1$ oder $+1$) ist das Spannungs- und Stromminima = 0. Es scheint auch so, dass sich die Welle nicht bewegt, man spricht daher von einer *stehenden Welle*.

Ist die Leitung ideal abgeschlossen, so existiert keine reflektierte Welle. Die Spannungs- und Strombeträge längs der Leitung sind konstant.

Das Verhältnis von Spannungsmaxima zu Spannungsminima wird definiert als

$$SWR = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}$$

SWR ist positiv reell und liegt zwischen 1 (idealer Abschluss) und unendlich (Totalreflexion am Leitungsende). Aus SWR findet man den Betrag des Reflexionsfaktors:

$$|\Gamma_L| = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}$$

6.2.5. Mehrfachreflexionen

Sind an beiden Leitungsenden Fehlanpassungen vorhanden, so ergeben sich Mehrfachreflexionen, d.h. wiederholt hin- und herlaufende Wellen.
Die Signale auf Leitungen mit Mehrfachreflexionen können mit unendlichen Reihen dargestellt werden. Da die Beträge der Reflexionskoeffizienten kleiner als 1 sind, nehmen die Werte mit jeder zusätzlichen Reflexion ab. Oft genügt es, nur wenige Terme zu berücksichtigen, da die Reihen rasch konvergieren, wenn die Leitungen einigermassen gut angepasst sind.

A. Einheiten

A.1. Vielfache von Einheiten

Faktor	Vorsatz	Zeichen	Faktor	Vorsatz	Zeichen
10^3	Kilo	k	10^{-3}	Milli	m
10^6	Mega	M	10^{-6}	Mikro	μ
10^9	Giga	G	10^{-9}	Nano	n
10^{12}	Tera	T	10^{-12}	Piko	p

Tabelle A.1.: *Vielfache von Einheiten*

A.2. Wichtige Einheiten in der Elektrotechnik

Einheit für	Bezeichnung	Zeichen
Strom	Ampére	A
Spannung	Volt	V
Leistung	Watt	W
Widerstand	Ohm	Ω
Leitwert	Siemens	S
Kapazität	Faraday	F
Induktivität	Henry	H

Tabelle A.2.: *Einheiten in der Elektrotechnik*

B. Trigonometrie

B.1. Funktionswerte für einige Winkel

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$

B.2. Trigonometrische Kurven

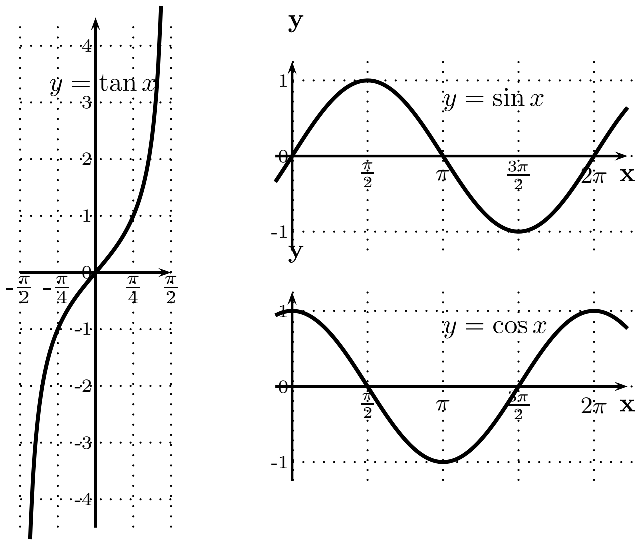


Abbildung B.1.: *Trigonometrische Kurven*

Index