Analysis I/II - Zusamenfassung

Patrick Pletscher

18. Oktober 2003

1. Grundstrukturen

1.1. Reelle Zahlen

$$| x | := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$sgn(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

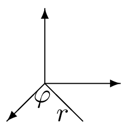
1.2. Koordinaten in der Ebene und im Raum

Polarkoordinaten (in der Ebene)

$$\begin{array}{ll} x = r\cos\phi & y = r\sin\phi \\ r = \sqrt{x^2+y^2} & \tan\phi = \frac{y}{x} \end{array}$$

Zylinderkoordinaten

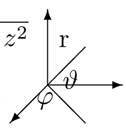
$$\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & r = \sqrt{x^2+y^2} \\ y = r\sin\varphi & \tan\varphi = \frac{y}{x} \\ z = z & z = z \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi & \end{array}$$



Kugelkoordinaten

$$\begin{array}{ll} x = r\cos\vartheta\cos\varphi & r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ y = r\cos\vartheta\sin\varphi & \tan\varphi = \frac{y}{x} \\ z = r\sin\vartheta & \sin\vartheta = \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \end{array}$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \vartheta \leq \pi$$



1.3. Vektoralgebra

Skalarprodukt

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, dann $\vec{a} \perp \vec{b}$
$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$, dann $\vec{a},\vec{b}$ spitzer Winkel
$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$, dann $\vec{a},\vec{b}$ stumpfer Winkel

Vektorprodukt

(1) $| \vec{a} \times \vec{b} | = | \vec{a} || \vec{b} | \sin\phi$
(2) $| \vec{a} \times \vec{b} | \perp \vec{a}$ und $| \vec{a} \times \vec{b} | \perp \vec{b}$
(3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$: Rechtshändiges System

analytisch:
$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$

Es gilt:
$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

Diverses

Fläche eines Parallelogramms: $A = | \vec{a} \times \vec{b} |$
Volumen eines Spates: $V = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c}$
Ebene: $\vec{n}\cdot r - \vec{n}\cdot\vec{p} = 0$
Abst. von 2 Punkten:
in $\mathbb{R}^2$: $r = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$
in $\mathbb{R}^3$: $r = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)}$
Abst. d zweier Geraden $\vec{r}_{1/2} + u/v\vec{a}_{1/2}$: $d = \frac{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$

1.4. Komplexe Zahlen

Grundlagen

$i^2 = -1,\ \frac{-1}{i} = i$
$z = x + iy$
$z = r(\cos\phi + i\sin\phi),\ r = \sqrt{x^2+y^2},\ \tan(\phi) = \frac{y}{x}$
$\cos\phi + i\sin\phi =: e^{i\phi}$
$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

$z_1\cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
$z_1\cdot z_2 = [r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)]\cdot[r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)] = (r_1r_2)\cdot[\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)]$
$z_1\cdot z_2 = (r_1\cdot e^{i\phi_1})\cdot(r_2\cdot e^{i\phi_2}) = (r_1r_2)\cdot e^{i(\phi_1+\phi_2)}$

$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)\cdot(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)\cdot(x_2-iy_2)}$
$\frac{z_1}{z_2} = (\frac{r_1}{r_2})\cdot e^{i(\phi_1-\phi_2)}$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2},\ |z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

$z^n = [r\cdot e^{i\phi}]^n = r^n\cdot e^{in\phi}$

Radizieren

Wurzeln der Gleichung $z^n = a = r \cdot e^{i\phi}$
$z_k = \sqrt[n]{r}[cos(\frac{\phi+k\cdot 2\pi}{n}) + i \cdot \sin(\frac{\phi+k\cdot 2\pi}{n})]$ $(k = 0, \ldots, n-1)$
oder $z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\phi+k\cdot 2\pi}{n}}$

quadratische und höhere Gleichungen

Falls $x+iy$ eine NS eines Polynoms, so ist auch $x-iy$ eine NS davon.
$z^2 + pz + q = 0 \Rightarrow (z + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q =: D$
$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$
Beispiel: komplexe NS von $z^{57} - 2z^{56} + z^5 5 - z^2 + 2z = 0$ bestimmen. $\Rightarrow (z^{55} - 1)(z-1)^2 = 0$. Also ist die Lösungsmenge $z_k = e^{ik\frac{2\pi}{55}}$, $k = 0, \ldots, 54$ und z_0 dreifache NS.

1.5. Kegelschnitte

Ellipsengleichung: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a:x-Halbachse, b:y-Halbachse
Parabelgleichung: $y^2 = 2px$ p:y-Halbachse
Hyperbelgleichung: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a:x-Halbachse, b:y-Halbachse

2. Funktionen

Erscheinungsformen

$f: \ A \to B, x \mapsto y := f(x)$
$dom(f) := A$
$im(f) := y \in B | \exists x \in A: \ y = f(x)$

2.1. Eigenschaften von Funktionen

- Injektivität: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (eindeutige Abbildung)
- Surjektivität: jedes $y \in im(f)$ wird angenommen
- Bijektivität: gleichzeitig injektiv und surjektiv (d.h. es existiert ein f^{-1})
- Konvexität:
  - konvex: Steigung der Tangente nimmt monoton zu (Linkskurve) $\Rightarrow f''(t) > 0$
  - konkav: Steigung der Tangente nimmt monoton ab (Rechtskurve) $\Rightarrow f''(t) < 0$

Eine Fkt f: $\mathbb{X} \to \mathbb{X}'$ heisst *gerade*, wenn f(-x)=f(x) $\forall x \in dom(f)$
Eine Fkt heisst *ungerade*, wenn f(-x)=-f(x)

Stetigkeit

f ist stetig, wenn sich zu noch so kleiner Toleranz $\epsilon > 0$ ein Schlupf $\delta > 0$ angeben lässt, so dass $\forall x \in dom(f)$ gilt:

Definition der Stetigkeit von f in x_0:
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ mit $| x - x_0 | < \delta \to | f(x) - f(x_0) | < \epsilon$

Zwischenwertsatz

$f[a,b] \to \mathbb{R}$, stetig
$f(a) < 0, f(b) > 0$
f besitzt in diesem Intervall wenigstens eine NS:
$\exists \xi \in]a,b[$ mit $f(\xi) = 0$

Minimumfunktion zweier Funktionen

$min\{x,y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x-y|)$

2.2. Grenzwerte

Bernoulli de l'Hopital

Wenn für $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ oder $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ ein unbestimmter Ausdruck wie "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$" entsteht und f, g diff'bar sind, so gilt die Regel (auch mehrmals anwendbar):
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Wenn BdH nicht anwendbar, können die folgenden Umformungen weiterhelfen, so dass nachher BdH anwendbar ist:

Funktion $\varphi(x)$	$\lim_{x\to x_0} \varphi(x)$	Elementare Umformung
$u(x)v(x)$	$0 \cdot \infty$ bzw. $\infty \cdot 0$	$\frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$ bzw. $\frac{v(x)}{\frac{1}{u(x)}}$
$u(x) - v(x)$	$\infty - \infty$	$\frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{u(x)}}{\frac{1}{u(x)v(x)}}$
$u(x)^{v(x)}$	$0^0, \infty^\infty, 1^\infty$	$e^{v(x)\cdot \ln u(x)}$

Beispiel
$\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot (\sin(\frac{2}{n^2}) + \cos(\frac{1}{n}) - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{2}{n^2}) + \cos(\frac{1}{n} - 1)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to 0} \frac{\sin(2x^2)+\cos(x)-1}{x^2}$
danach 2x BdH.

Rechenregeln

für $x \to x_0$ und $x \to \pm\infty$

$\lim[cf(x)] = c(\lim f(x))$	$\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$
$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$	$\lim[a^{f(x)}] = a^{\lim f(x)}$
$\lim[\log_a f(x)] = \log_a[\lim f(x)]$	$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$

Asymptoten

Eine Funktion $f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$ $(a_n, b_m \neq 0)$ hat folgende Asymptoten:

$n < m$: x-Achse ist die Asymptote

$n = m$: die Gerade $\frac{a_n}{b_m}$ ist die Asymptote

$n = m+1$: schiefe Asymptote (Polynomdivision machen und $\lim_{x\to\pm\infty}$ betrachten)

Berechnung der Asymptoten:
$\lim_{t\to\infty}(f(t) - (pt+q)) = 0$ mit Asymptote $y = pt+q$
$p = \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t}$
$q = \lim_{t\to\infty}(f(t) - pt)$
Die Asymptote existiert, wenn diese beiden Grenzwerte existieren.

Standardgrenzwerte

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
$\lim_{x\to\infty}(x^m e^{-ax} = 0),\ a > 0$ $\lim_{x\to 0}(x^a \ln x) = 0,\ a > 0$
$\lim_{x\to\infty}(x^{-a}\ln x) = 0,\ a > 0$ $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$
$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{nx}-1}{n} = 1$

2.3. Folgen und Reihen

Eine Zahlenfolge ist eine *Folge* von Zahlen, die durch eine implizite Formel $a_n = f(n)$ oder durch eine rekursive Formel wie z.B. $a_{n+1} = 2a_n$ bestimmt wird.

Eine *Reihe* ist dann eine *Partialsumme* einer solchen Folge: $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$. Falls $n = \infty$ so heisst die Folge unendliche Folge.

Falls eine Reihe eine ungewöhnliche Form hat, wie z.B. $\sum a_k x^{2n}$, kann man substituieren. In diesem Beispiel: $z = x^2 : \sum a_k z^n$. Oder z.B. $\sum a_k x^{2n+1} \to \sqrt{z}\sum a_k z^n$.

verschiedene Reihen

arithmetische Reihe
$\sum_{k=0}^{n} k = 1 + 2 + \ldots = \frac{n(n+1)}{2}$

geometrische Reihe
$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + ... = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ falls $| q |< 1$
und für $n = \infty$: $\frac{1}{1-q}$

harmonische Reihe
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ ist *divergent.*

alternierende harmonische Reihe
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots = \ln 2$

alternierende Reihe
$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} c_k$ konvergiert, wenn c_k monoton fallend gegen 0 und $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Konvergenzkriterien für Folgen und Reihen

Eine Reihe heisst *absolut konvergent*, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Eine solche Folge konvergiert auch normal. Die Umkehrung gilt jedoch nicht.

Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Folge ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
Die folgenden Bedingungen sind hinreichend, aber nicht notwendig:

Quotientenkriterium $\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = q < 1$

Wurzelkriterium $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q < 1$

Für $q = 1$ versagt das Kriterium und für $q > 1$ divergiert die Reihe.

Potenzreihen und ihr Konvergenzverhalten

$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

Für jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ existiert ein wohlbestimmtes ρ, $0 \le \rho \le \infty$, so dass die Reihe für $|x| < \rho$ konvergiert (absolut) und für $|x| > \rho$ divergiert.

$\rho = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}|$ oder $\rho = \frac{1}{\lim_{k\to} \sqrt[k]{|a_k|}}$

Die Darstellung einer Funktion durch eine Potenzreihe ist stets auf ein bestimmtes Intervall (den Konvergenzbereich) beschränkt.
Eine gerade Funktion (symm. zur y-Achse) enthält nur gerade Potenzen und eine ungerade Funktion nur ungerade Potenzen.

Wichtige Eigenschaften der Potenzreihen:

- Eine Potenzreihe konvergiert innerhalb des Konvergenzbereiches absolut.
- Eine Potenzreihe darf innerhalb ihres Konvergenzbereiches gliedweise differenziert und integriert werden (Integration ist nur dann möglich, wenn der Integrationsbereich im Konvergenzbereich liegt). Die neuen Potenzreihen besitzen dabei den selben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.
- Zwei Potenzreihen dürfen im gemeinsamen Konvergenzbereich der Reihen gliedweise addiert, subtrahiert und miteinander multipliziert werden (wie Polynomfunktionen). Die neuen Potenzreihen konvergieren dann mindestens im gemeinsamen Konvergenzbereich der Ausgangsreihen.

Binomialreihen und ihr Konvergenzverhalten

Definition des Binomialkoeffizienten: (auch für $\alpha \in \mathbb{C}$)
$\binom{\alpha}{0} = 1,\ \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$ $(k \ge 1)$

Die Binomialreihe $b_\alpha(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha\cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\cdot x^2 + \ldots$ ist für $\alpha \in \mathbb{N}$ ein Polynom gemäss dem binomischen Lehrsatz: $\forall x \in \mathbb{R} : b_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$. Für $\alpha \notin \mathbb{N}$ besitzt sie den Konvergenzradius 1 und im Intervall $-1 < x < 1$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha$.

2.4. Trigonometrische Funktionen

Definitionen

$\cos t = Re(e^{it}) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j}}{(2j)!} = \frac{x}{r}$
$\sin t = Im(e^{it}) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j+1}}{(2j+1)!} = \frac{y}{r}$
$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y}{x}$, $\cot\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$

Additionstheoreme

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$
$\cos\varphi = \sin(\varphi + \pi/2)$
$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$
$\cos(-\varphi) = \cos\varphi$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
$\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi$
$\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = 1 - 2\sin^2\varphi$
$\sin(3\varphi) = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$
$\cos(3\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$
$\sin^2(\frac{\varphi}{2}) = \frac{1-\cos\varphi}{2}$
$\cos^2(\frac{\varphi}{2}) = \frac{1+\cos\varphi}{2}$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
$\tan(2\varphi) = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}$
$\tan(3\varphi) = \frac{3\tan\varphi - \tan^3\varphi}{1-3\tan^2\varphi}$
$\tan^2(\frac{\varphi}{2}) = \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$
$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$

Funktionswerte für einige Winkel

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

2.5. Die Exponentialfunktion

$exp\ z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist für alle z $\in \mathbb{C}$ definiert.
Für beliebige z,w $\in \mathbb{C}$ gilt:
$exp(z+w) = exp(z) \cdot exp(w)$, $exp 1 =: e$
Es gilt:

1. Die Exponentialfunktion ist auf $\mathbb{R}$ positiv und streng monton wachsend.
2. Für jedes k $\in \mathbb{N}$ gilt: $\lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{t^k} = \infty$, $\lim_{t\to\infty} e^t = 0$

Hyperbolische Funktionen

Jede Funktion mit einem bzgl. 0 symm. Def.bereich, lässt sich in einen geraden und einen ungeraden Anteil zerlegen. Bei der Exponentialfunktion führt diese Zerlegung auf die hyperbolischen Funktionen (d.h. $\cosh x + \sinh x = e^x$).

$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
$\cosh(x+y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) + \sinh(x) \cdot \sinh(y)$
$\sinh(x+y) = \sinh(x) \cdot \cosh(y) + \cosh(x) \cdot \sinh(y)$
$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

2.6. Logarithmusfunktion

$log := (exp)^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ der natürliche Logarithmus

$\forall x \in \mathbb{R}_{>0} : e^{\ln x} = x$
$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$
$\lim_{x\to 0+}(x^\alpha \log x) = 0$ wächst schwächer als jede noch so kleine Potenz
$log(u \cdot v) = log(u) + log(v)$

allgemeine Potenz

a^x def. durch $e^{x * log(a)}$

Rechenregeln

$\log a^x = x \cdot \log a$
$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

3. Eindimensionale Differentialrechnung

3.1. Grundbegriffe, Rechenregeln

$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = cx$	$f'(x) = c$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^{cx}$	$f'(x) = ce^{cx}$
$f(x) = \ln\lvert x\rvert$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a \lvert x\rvert$	$f'(x) = (\log_a e)\frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
$f(x) = a^{cx}$	$f'(x) = a^{cx} \cdot (c \ln a)$
$f(x) = x^x$	$f'(x) = (1 + \ln x)x^x$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -(1 + \cot^2(x))$
$f(x) = \arcsin(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = arccot(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \sinh(x)$	$f'(x) = \cosh(x)$
$f(x) = \cosh(x)$	$f'(x) = \sinh(x)$
$f(x) = \tanh(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$
$f(x) = coth(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)} = 1 - coth^2(x)$
$f(x) = arcsinh(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x) = arccosh(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$f(x) = artanh(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = arcoth(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Rechenregeln

$(f+g)' = f' + g'$

$(cf)' = c \cdot f'$

$(f \cdot g)' = f'g + fg'$ Produktregel

$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ Quotientenregel

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ Kettenregel

$\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) \Rightarrow \vec{f}' = (f_1', f_2', f_3')$

Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $g = f^{-1}$ und $y = f(x)$, dann gilt:
$\frac{d}{dy}g(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$

3.2. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz von Rolle

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, mit $f(a) = f(b) = c$. Ist f im Innern von $[a,b]$ diff'bar, so existiert ein Punkt $\xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = 0$, e.g. $\exists \xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = 0$

Mittelwertsatz der Diff'rechnung

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren von $[a,b]$ diff'bar, dann gibt es einen Punkt $\xi \in]a,b[$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

3.3. Extremalstellen bestimmen

x_0 ist ein kritischer Punkt, wenn $f'(x_0) = 0$. Es gilt:

- $f''(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; f$ hat bei x_0 ein Minimum
- $f''(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; f$ hat bei x_0 ein Maximum
- $f''(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, dann hat f bei x_0 einen Wendepunkt

3.4. Taylor-Approximation

Taylorsches Approximationspolynom

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ genügend oft differenzierbar. Das n-te Taylorpolynom von f um x_0:

$$j^n_{x_0} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Falls $n = \infty$ so heisst die Summe Taylor-Reihe und ist eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f.

Beispiel:
$f(a + \Delta a) \approx f(a) + f'(a) \cdot \Delta a$

Qualität der Approximation

$f(x) = j^n_{x_0} f(x) + R_n(x)$, wobei R_n das n-te Restglied (Abbrechfehler) ist, für den gilt:
Für ein geeignetes $\tau \in]x_0, x[$ hat R_n den Wert:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)(\tau)}}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Die Approximation ist nur möglich, falls $lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

Verfahren von Newton zur Nullstellensuche

Approximative Lösung von f(x)=0:
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

4. Mehrdimensionale Differentialrechnung

4.1. Grundbegriffe

partielle Ableitungen

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = f_x(x,y,z)$
Funktion nach x ableiten, y und z als Konstanten betrachten.
Es gilt: $(f_x)_y = (f_y)_x$

$f_X \equiv 0$ auf einem "anständigen" Bereich $\Leftrightarrow f(x,y)$ hängt nur von x ab.

$f_{xy} \equiv 0 \Leftrightarrow f(x,y) = F(x) + G(y)$

f sei stetig diff'bar, dann gilt: $f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_X(x_0,y_0) + f_Y(x_0,y_0) + o(\vec{x} - \vec{x_0})$ für $\vec{x} \to \vec{x_0}$

Gradient ∇

Der Gradient ist ein Vektor, der aus den partiellen Ableitungen 1. Ordnung einer Funktion gebildet wird und immer senkrecht auf f (im Punkt P) bezl. der Niveaulinie (Niveaufläche) steht:

$$grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f$$

$grad\, f(P_0)$ zeigt in die Richtung der max. Zuwachsrate von f an der Stelle P_0 und $\mid grad\, f(P_0) \mid$ ist gleich dieser max. Zuwachsrate.

Richtungsableitung

Sie ist ein Mass für die Änderung eines Funktionswertes, wenn man von P aus in Richtung $\vec{\nu}$ geht. Es ist die Projektion vom Gradienten im Punkt P auf die Richtung $\vec{\nu}$:

$$D_{\vec{\nu}} f = \frac{1}{|\vec{\nu}|}\langle \nabla f, \nu \rangle$$

Tangentialebene

Gleichung der Tangentialebene in $P_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\langle \nabla f(P_0), \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - P_0 \rangle = 0$$

Verallgemeinerte Kettenregel

Sei $\phi : t \to f(\vec{x}(t))$, dann gilt:

$$\frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) = \langle \nabla f(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x}'(t) \rangle$$

Beispiel:
$\phi(t) = f(x(t), y(t)) \equiv c_0$
$\phi'(t) = f_x \cdot \dot{x} + f_y \cdot \dot{y} = 0$

Leibniz-Regel

Integrale mit einem Parameter

$$\frac{d}{dt} \int_B f(\vec{x}, t) d\mu(\vec{x}) = \int_B f_t(\vec{x}, t) d\mu(\vec{x})$$

Integralbereich hängt von t ab
$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = f(b(t),t) \cdot b'(t) - f(a(t),t) \cdot a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)dx$

4.2. Taylorentwicklung bei Funktionen mehrerer Variablen

Für eine Funktion von n Variablen bedient man sich einer Hilfsfunktion (hier beispielsweise mit n=2) $\phi(t) := f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$ $(0 \le t \le 1)$. Damit ist dann $\phi(0) = f(x_0, y_0)$ und $\phi(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Durch Anwendung der Taylorentwicklung für n=1 erhält man dann: $\phi(1) = \phi(0) + \frac{1}{1!}\phi'(0) + \frac{1}{2!}\phi(0) + \ldots + \frac{1}{N!}\phi^{(N)}(0) + R_N$. Für die Ableitung von ϕ benutzt man die verallgemeinerte Kettenregel.

2 Variablen

$j^N_{x_0,y_0} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x \Delta x + f_y \Delta y + \frac{1}{2}[f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta x \Delta y + f_{yy}\Delta y^2] + \ldots + \frac{1}{N!}[\binom{N}{0} f_{x^N} \Delta x^N + \binom{N}{1} f_{x^{N-1}y} \Delta x^{N-1} \Delta y + \ldots] + R_N(x,y)$

Die partiellen Ableitungen sind an der Stelle (x_0, y_0) zu nehmen und $\Delta x = (x - x_0)$, $\Delta y = (y - y_0)$

3 Variablen

$j^N_{x_0,y_0,z_0} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) = f(x_0, y_0, z_0) + f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z + \frac{1}{2}[f_{xx}\Delta x^2 + f_{yy}\Delta y^2 + f_{zz}\Delta z^2 + 2f_{xy}\Delta x \Delta y + 2f_{xz}\Delta x \Delta z + 2f_{yz}\Delta y \Delta z] + \ldots + R_N$

4.3. Extremalstellen

Berechnung der Extrema einer Funktion f auf einem n-dimensionalen Bereich B.

1. *Kritische Punkte im Innern von B*
   $\vec{\nabla} f(P_0) = \vec{0}$. Diese Lösungsmenge kann aber auch Punkte vom falschen Typ und solche, die nicht in B liegen beinhalten.
   a) $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$ an der Stelle (x_0, y_0)
      i. $f_{XX}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum
      ii. $f_{XX}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum
   b) $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} < 0$ an der Stelle (x_0, y_0)
      $\Rightarrow$ keine lokale Extremalstelle: Sattelpunkt
   c) $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = 0$ an der Stelle (x_0, y_0)
      $\Rightarrow$ Entartung
2. *Bedingt kritische Punkte auf jeder d-dimensionalen Seitenfläche mit* $0 < d < n$
   Seitenfläche durch Funktion $\vec{g}$ ausdrücken und mit Lagrange Extremalwerte bestimmen.
3. *die Ecken von B*

Extremalstellen mit Nebenbedingungen

Satz $\nabla g(P_0) \neq 0$. Sei P_0 eine Extremalstelle von f auf der Fläche $g(x,y,z) = 0$. Dann gibt es eine Zahl λ mit $\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0)$.
Zusätzlich muss gelten: $g(x,y,z) = 0$

Allgemein mit mehreren Nebenbedingungen:
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und Nebenbed. $g_1 = 0, \ldots, g_r = 0$

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \ldots + \lambda_r \nabla g_r$$
$$g_1 = 0, g_2 = 0, \ldots, g_r = 0$$

4.4. Implizite Funktionen

Gegeben die Funktion $f(x,y) = 0$.

Wenn $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ so gibt es ein Fenster mit Zentrum (x_0, y_0) in dem gilt $x \mapsto y = \phi(x)$, wobei $\phi(x_0) = y_0$ und $f(x, \phi(x)) = 0$. Es gilt dann:

$$\phi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$$

$$\phi''(x_0) = [\frac{f_{xx} f_y^2 + 2 f_x f_{xy} f_y - f_x^2 f_{yy}}{f_y^3}]$$

Analoges gilt auch wenn $f_x(x_0, y_0) \neq 0$, dann gibt es aber eine Funktion $y \mapsto x = \psi(y)$ und die Ableitungen lauten:

$$\psi'(y_0) = -\frac{f_y(x_0, y_0)}{f_x(x_0, y_0)}$$

$$\psi''(y_0) = [\frac{f_{yy} f_x^2 + 2 f_y f_{xy} f_x - f_y^2 f_{xx}}{f_x^3}]$$

Anwendungen auf Niveaulinien $f(x,y) = c$

Parameterdarstellung einer Niveaulinie:
Vor: $grad f(P_0) \neq \vec{0}$, dann $\exists$ Fenster und $\phi : x \mapsto \phi(x)$ in P_0: $grad\, f(P_0) \cdot (1, \phi'(x_0)) = 0$ falls $f_Y(x_0, y_0) \neq 0$, sonst nach x auflösen ($x = \psi(y)$).
Der Gradient steht also senkrecht zur Tangente an die Niveaulinie.

Niveaufläche $f(x,y,z)=c$ im Raum

P_0 auf Fläche
$grad\, f(P_0) \perp$ Tangentialebene.

4.5. Die Funktionalmatrix

$\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \;\; \vec{x} \mapsto \vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$
Abbildung $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$
Die Jacobische Matrix oder Funktionalmatrix von $\vec{f}$ an der Stelle $\vec{p}$ sieht folgendermassen aus:

$$Jac(f) := (\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}})_{\vec{p}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Zuwachs von $\vec{p}$:
$\Delta \vec{f}(\vec{p}+d\vec{x}) - \vec{f}(\vec{p}) = A \cdot d\vec{x} + o(|d\vec{x}|)$ (Matrixmultiplikation)
Falls m=n: Koordinatentransformation

Als Funktional- oder Jacobideterminante wird $|A|$ bezeichnet

Zusammensetzungen von Abbildungen

$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$

$(\frac{\partial z}{\partial x})_P = (\frac{\partial (g \cdot f)}{\partial x})_P = (\frac{\partial z}{\partial y})_Q \cdot (\frac{\partial y}{\partial x})_P$ (Matrixmult.)

Existenz einer Umkehrabbildung

$f : f^{-1}$
$(\frac{\partial f^{-1}}{\partial y})_{Q_0} \cdot (\frac{\partial f}{\partial x})_{P_0} = I$

Satz $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$P_0 \to f(P_0) = Q_0$
Vor: $det((\frac{\partial f}{\partial x})_{P_0}) \neq 0$
$\Rightarrow\; \exists$ Umgebung U um Q_0, wo f umkehrbar ist, d.h. $\exists f^{-1}: U \to \mathbb{R}^n$.

4.6. Kurvenschar in der Ebene

$F(x,y,c) = 0$
Zu jeder Schar gehört eine Diff'gl. deren Lösungen die Kurven der Schar ist (und umgekehrt).

Kurvennormale an γ in $\gamma(t)$

$\langle n - \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$

Orthogonale Trajektorien

Geg: $F(x,y,c)=0$. Kurve zum Parameter c: γ_c
Ges: Kurve durch einen Punkt P_0 von einer γ_c, welche alle γ_c $\perp$ schneidet: "Orthogonale Trajektorien".

Die orthogonalen Traj. sind die Kurven steilsten Anstiegs.

Diff'Gl der orthogonalen Trajektorien:
$y' = -\frac{1}{f(x,y)} \to$ Lösung $\to=$ Schar der $\perp$ Traj.

Geg. Schar $F(x,y,c)=0$	$\to$	Diff'Gl $y' = f(x,y)$
		$\downarrow$
ges. Schar der $\perp$ Trajektorien	$\leftarrow$	Diff'Gl der $\perp$-Schar $y' = \frac{1}{f(x,y)}$

Enveloppe/Einhüllende

Eine Einhüllende ϵ einer Schar Γ ist eine Kurve welche in jedem Punkt von einer Kurve der Schar berührt wird. Berührungspunkt = gemeinsamer Punkt und gemeinsame Tangente.

Bestimmung von evtl. Einhüllenden
Schar: $F(x,y,c)=0$
Einhhüllende in Parameterdarst:
gemeinsamer Punkt: $F(x(c),y(c),c)=0$ für alle c
gemeinsame Tangente: $F_C(x,y,c)=0$
Aus diesen beiden Gleichungen nun den den Parameter c eliminieren und man erhält die Gleichung für die Enveloppe.
Bemerkungen

- nicht jede Schar hat eine Einhüllende
- in $P \in \epsilon$ hat die Diff'gl $y' = f(x,y)$ 2 Lös.

5. Integralrechnung

5.1. Integralbegriff

Intervall $[a,b]$
$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$
$\Delta x_k = \frac{b-a}{N}$

5.2. Hauptsätze

1. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
4. $\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = f(g(x)) \cdot g'(x)$
5. $\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{b} f(t)dt = -f(g(x)) \cdot g'(x)$

5.3. Technik des Integrals

Partielle Integration

$$\int u(t)v'(t)\,dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t)\,dt$$

Substitutionsmethode

$F(g(x)) + c = \int f(g(x)) \cdot g'(x)dx$
Beispiel:
$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$
$t = \cos(x)$
$dt = -\sin(x)dx \rightarrow dx = -\frac{dt}{\sin x}$
$\Rightarrow -\int \frac{1}{t}dt = -ln|\cos(x)| + c$

Oftmals auch umgekehrt:
$\int \sqrt{1-t^2}dt$
$t = \sin(x)$
$dt = \cos(x)dx$
$\Rightarrow \int \cos^2(x)dx$

Partialbruchzerlegung

Gegeben sei eine Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind.

1. Falls $deg(p(x)) > deg(q(x))$, so macht man eine Polynomdivision.

2. Nullstellen von $q(x)$ bestimmen

3. Jeder Nullstelle einen Partialbruch zuordnen Dabei multipliziert man jede NS mit dem ursprünglichen Bruch und setzt für x den Wert der NS ein.

   α: einfache NS $\rightarrow \frac{A}{(x-\alpha)}$
   α: r-fache NS $\rightarrow \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \ldots + \frac{A_r}{(x-\alpha)^r}$
   $\alpha \in \mathbb{C}$ so behält dieser Teil die Form $\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$

   Beispiel
   $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$
   $A = \frac{1}{(x+1)(x+2)}|_{x=0} = \frac{1}{1 \cdot 2}$
   $B = \frac{1}{x(x+2)}|_{x=-1} = \frac{1}{(-1) \cdot 1}$
   $C = \frac{1}{x(x+1)}|_{x=-2} = \frac{1}{(-2) \cdot (-1)}$

4. $f(x)$ ist nun als Summe aller Partialbrüche darstellbar

5. Integrale der Partialbrüche bestimmen

   a) $q(x) = (x-\alpha)$
   $\int \frac{A_i}{bx+c}dx = A_i \cdot \frac{1}{b}\ln|bx+c| + C$

   b) $q(x) = (x-\alpha)^r$
   $\int \frac{A_i}{(x-\alpha)^r} = \frac{1}{-r+1}\frac{A_i}{(x-\alpha)^{r-1}}$

   c) $q(x) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = (x-\beta)^2 + \gamma^2$
   $\alpha = \beta + i\gamma, \overline{\alpha} = \beta - i\gamma$
   $\int \frac{Bx+c}{q(x)}dx = \frac{B}{2}\ln q(x) + (B\beta + c)\frac{1}{\gamma}\arctan(\frac{x-\beta}{\gamma}) + C$

Wichtige Integrale

$$
\begin{aligned}
\int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1 \\
\int \frac{1}{x}dx &= \ln|x| + C \\
\int e^x dx &= e^x + C \\
\int \ln|x|dx &= x\ln|x| - x + C \\
\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx &= \ln|f(x)| \\
\int \sin x dx &= -\cos x + C \\
\int \cos x dx &= \sin x + C \\
\int \frac{1}{\cos^2 x}dx &= \tan x + C \\
\int \tan x dx &= -\ln|\cos x| + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \arcsin x + C \\
\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \arccos x + C \\
\int \frac{1}{1+x^2}dx &= \arctan x + C \\
\int \sinh x dx &= \cosh x + C \\
\int \cosh x dx &= \sinh x + C \\
\int \frac{1}{\cosh^2 x}dx &= \tanh x + C \\
\int \tanh x dx &= \ln\cosh x + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx &= arsinhx + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx &= arcoshx + C \\
\int \frac{1}{1-x^2}dx &= artanhx + C \\
\int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C \\
\int \cos^2 x dx &= \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + C \\
\int \tan^2 x dx &= \tan x - x + C \\
\int \cot^2 x dx &= -\cot x - x + C \\
\int (ax+b)^n dx &= \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} \\
\int \frac{1}{ax+b}dx &= \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \\
\int (ax^p+b)^s x^{p-1}dx &= \frac{(ax^p+b)^{s+1}}{ap(s+1)} + C \\
\int (ax^p+b)^{-1}x^{p-1}dx &= \frac{1}{ap}\ln|ax^p+b| + C \\
\int \log_a|x|dx &= x(\log_a|x| - \log_a e) + C \\
\int x^{-1}\ln x dx &= \frac{1}{2}(\ln^x)^2 + C \\
\int \cot x dx &= \ln|\sin x| + C \\
\int \sin(ax+b)dx &= -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C \\
\int \cos(ax+b)dx &= \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C \\
\int \frac{1}{\sin x}dx &= \ln|\tan\frac{x}{2}| + C \\
\int \frac{1}{\cos x}dx &= \ln|\tan(\frac{x}{2} + 4\pi)| + C \\
\int \sin^n x dx &= -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} + C \\
\int \cos^n x dx &= \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} + C
\end{aligned}
$$

Standard-Substitutionen

Integral	Substitution	Differential	Bemerkungen
$\int f(x, \sqrt{ax+b})dx$	$x = \frac{t^2-b}{a}$	$dx = \frac{2tdt}{a}$	$t \geq 0$
$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$	$x = \alpha t + \beta$	$dx = \alpha dt$	wähle α und β so, dass gilt $ax^2 + bx + c = \gamma \cdot (\pm t^2 \pm 1)$
$\int f(x, \sqrt{1-x^2})dx$	$x = \sin t$	$dx = \cos t dt$	$-\frac{\Pi}{2} \leq t \leq \frac{\Pi}{2}$
$\int f(x, \sqrt{1+x^2})dx$	$x = \sinh t$	$dx = \cosh t dt$	$t \in \mathbb{R}$
$\int f(x, \sqrt{x^2-1})dx$	$x = \cosh t$	$dx = \sinh t dt$	$t \geq 0$
$\int f(e^x, \sinh x, \cosh x)dx$	$e^x = t$	$dx = \frac{dt}{t}$	$t > 0$, und dabei gilt $\sinh x = \frac{t^2-1}{2t}$, $\cosh x = \frac{t^2+1}{2t}$
$\int f(\sin x, \cos x)dx$	$\tan\frac{x}{2} = t$	$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$	$-\frac{\Pi}{2} < t < \frac{\Pi}{2}$, und dabei gilt $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

5.4. Uneigentliche Integrale

$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\rightarrow\infty}\int_a^b f(x)dx$
$\int_0^b g(x)dx := \lim_{\epsilon\rightarrow 0+}\int_\epsilon^b g(x)dx$

Grenzwert kann existieren, oder evtl. nicht!

Vergleichskriterium

Gilt $|f(x)| \leq g(x)$ für $x \in [a, \infty[$ und konvergiert $\int_a^\infty g(x)dx$, so konvergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$
Gilt $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und divergiert $\int_a^\infty g(x)dx$, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$

Testfunktionen

1. $x \to \infty$

   a) Nimmt $f(x)$ für $x \to \infty$ mindestens so rasch ab wie $\frac{1}{x^\alpha}$ mit geeignetem $\alpha > 1$, dass heisst: Gilt für ein C und ein $\alpha > 1$ die Abschätzung

   $$|f(x)| \leq \frac{C}{x^\alpha} \;\; (x > x_0)$$

   so ist das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ (absolut) konvergent.

   b) Ist jedoch für ein geeignetes $C > 0$ durchwegs $f(x) \geq \frac{C}{x}$ $(x > x_0)$ so ist das Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ divergent

2. $x \to 0+$

   a) Geht $g(x)$ für $x \to 0+$ höchstens so rasch gegen ∞ wie $\frac{1}{x^\beta}$ mit einem geeigneten $\beta < 1$, das heisst: Gilt für ein C und ein $\beta < 1$ die Abschätzung

   $$0 \leq g(x) \leq \frac{C}{x^\beta} \;\; (0 < x < x_0)$$

   so ist das uneigentliche Integral $\int_0^b g(x)dx$ konvergent.

   b) Ist jedoch für ein geeignetes $C > 0$ durchwegs

   $$g(x) \geq \frac{C}{x} \;\; (0 < x < x_0)$$

   so ist das Integral $\int_0^b g(x)dx$ divergent

Summenkonvergenzen

$\int_{n_0}^\infty f(x)dx$ konvergiert/divergiert $\Leftrightarrow \sum_{n_0}^\infty f(k)$ konvergiert/divergiert.

Polstellen

f Pol in b. $\int_a^b f(x)dx$ konvergiert, falls $\lim_{c \to b} \int_a^c f(x)dx$ existiert.

Gamma-Funktion

$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$
$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$
$\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \ldots, \Gamma(n+1) = n!$

5.5. Bogenlänge einer ebenen Kurve

- von $y = f(x)$ in $[a, b]$
  $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$
- von $x = x(t), y = y(t)$ in $[a, b]$
  $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}dt$

Beispiel
Bestimme eine Funktion f so, dass die Kurve $\gamma(t) = (t, f(t))$ durch (0,1) verläuft und ihre Länge L zw. (0,1) und (x,y) gegeben ist durch $L = 2e^x - y$.
$L(\gamma) = \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2}dt = 2e^x - f(t)$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + f'(t)^2} &= 2e^t - f'(t) \\
1 + f'(t)^2 &= 4e^{2t} - 4e^t f'(t) + f'(t)^2 \\
4e^t f'(t) &= 4e2t - 1 \\
f'(t) &= \frac{4e^{2t} - 1}{4e^t} = -\frac{1}{4}e^{-t} + e^t \\
f(t) &= \frac{1}{4}e^{-t} + e^t - \frac{1}{4}
\end{aligned} \tag{1}$$

5.6. Mehrfache Integrale

Ist ein Bereich gegeben durch
$B = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, so gilt:

$$\int_B f(x, y)d\mu(x, y) = \int_a^b (\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy)dx$$

Schwerpunkt eines Körpers

$$\vec{x}_S = \frac{\int_B xdV, \int_B ydV, \int_B zdV}{\int_B dV}$$

Wobei über den ganzen Körper B integriert wird.

Trägheitsmoment Θ

$\Theta := \int_P a^2 d\mu(x, y, z)$

Wobei über den Körper integriert wird und a dem Abstand von der Rotationsachse entspricht.

5.7. Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale

Funktionen einer Variable

$\int\limits_a^b f(x)dx$ Substitution $x = \phi(t)$, $\alpha = \phi(a)$, $\beta = \phi(b) \Rightarrow \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$

Funktionen von 2 Variablen

Koordinatentransformation: $x = x(u, v)$; $y = y(u, v)$
$\iint\limits_B f(x, y)d\mu(x, y) \quad =$

$\iint\limits_{B'} f(x(u,v),y(u,v)) \cdot |det(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})| \cdot d\mu(u,v)$

Diese Determinate wird als Jaccobische Det. der Transformation bez.

Für 3 und mehr Variablen wird analog vorgegangen.

wichtige Korrekturfaktoren

- **Polarkoordinaten**
  $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $d\mu \to rdrd\varphi$
- **Kugelkoordinaten**
  $d\mu \to r^2 \cos\vartheta drd\vartheta d\varphi$
- **Zylinderkoordinaten**
  $d\mu \to rdrd\varphi dz$

5.8. Integrale über Fläche S

Flächeninhalt $\omega(S)$ der Fläche

$$S: \ B \to \mathbb{R}^3, \ (u,v) \mapsto r(u,v)$$

ist folgendermassen festgesetzt:

$$\omega(S) := \int_B |\vec{r_u} \times \vec{r_v}| d\mu(u,v)$$

Der unter dem Integralzeichen erscheindende Ausdruck

$$d\omega := |\vec{r_u} \times \vec{r_v}| d\mu(u,v)$$

wird als *(skalares) Oberflächenelement* bezeichnet.

Beispiel B parametrisiert durch:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi \\ R\cos\vartheta\sin\varphi \\ R\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Mit dieser Parametrisierung ist das vektorielle Flächenelement:

$d\vec{\omega} = \frac{\partial T}{\partial\varphi} \times \frac{\partial T}{\partial\vartheta} d\varphi d\vartheta$

$$= \begin{pmatrix} -R\cos\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\sin\vartheta\cos\varphi \\ -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix} d\varphi d\vartheta$$

$$= \begin{pmatrix} R^2\cos^2\vartheta\cos\varphi \\ R^2\cos^2\vartheta\sin\varphi \\ R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi \end{pmatrix} d\varphi d\vartheta$$

Funktion auf S integrieren

1. Funktion in $\mathbb{R}^3$ definiert: $f = f(x,y,z)$
   $\iint\limits_S f dw := \iint\limits_B f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|dudv$
2. Funktion auf $\mathbb{R}^2$ $f = f(u,v)$
   $\iint\limits_S f dw := \iint\limits_B f(u,v)|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|dudv$

6. Differentialgleichungen

6.1. Differentialgleichungen I

homogene DGL mit konstanten Koeffizienten

Gesucht $y(x)$ so dass

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (2)$$

Satz

- Sind y_1, y_2 Lösungen von (2), so auch $y_1 + y_2$ und $\alpha \cdot y_1$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
- Es gibt genau n linear unabhänigige Lösungen $y_0, \ldots, y_{n-1}$ und die allg. Lösung ist $y = c_0y_0 + c_1y_1 + \ldots + c_{n-1}y_{n-1}$

Ansatz für (2): $y(x) = e^{\lambda \cdot x}$

$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \ldots, y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$

(2)$\to$ $\lambda^n e^{\lambda x} + \ldots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0$

$\to e^{\lambda x} \underbrace{[\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0]} = 0$

chp(λ): charakteristisches Polynom

Falls λ_i eine Nullstelle von *chp*(λ) ist und gilt:

- λ_i *ist einfache Nullstelle*
  so ist $e^{\lambda_i x}$ eine linear unabhängige Lösung von (2).
- λ_i *ist m-fache Nullstelle*
  so sind die Funktionen $e^{\lambda_i t}, t \cdot e^{\lambda_i t}, t^2 \cdot e^{\lambda_i t}, \ldots, t^{m-1} \cdot e^{\lambda_i t}$ linear unabhängige Lösungen von (2).
- λ_i *ist komplexe Nullstelle*
  wenn also $\lambda_i = \mu_i + i\nu_i, \nu_i \neq 0$ bzw. die Lösung $z(x) = e^{\lambda_i x}$ so bilden $Re(z)$ und $Im(z)$ zwei reelle unabhängige Lösungen von (2).
  $Re(z) = e^{\mu_i x}\cos(\nu_i x)$
  $Im(z) = e^{\mu_i x}\sin(\nu_i x)$

Inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = K(t) \quad (3)$$

Satz Sei $y_{part}(t)$ eine spezielle Lösung von (3) und sei $y(t) = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n$ die allg. Lösung der homogenen Gleichung. Dann ist

$$y = y_{part} + c_1y_1 + \ldots + c_ny_n$$

die allg. Lösung der inhomogenen Gleichung (3).

Suche von partikulären Lösungen

Wenn $K(t) := t^r e^{\lambda t}$ bzw. allgemeiner $K(t) := q(t)e^{\lambda_0 t}$ mit einem Polynom $q(t)$ vom Grad r und λ_0 m-facher Nullstelle von *chp*(λ), so erhält man die partikuläre Lösung durch den Ansatz:

$$y_{part}(x) := (A_0 + A_1t + \ldots + A_rt^r)t^m e^{\lambda_0 t}$$

mit unbestimmten Koeffizienten A_k. Danach alle in (3) vorkommenden Ableitungen ausrechnen und in (3) einsetzen und A_k durch Koeffizientenvergleich bestimmen.

mögliche Ansätze

$K(t)$	Bedingung	Ansatz für $y_{part}(t)$
t^r	$0 \notin L$	$A_0 + \ldots + A_r t^r$
t^r	$0 \in L$, m-fach	$A_0 t^m + \ldots + A_r t^{m+r}$
$b_0 + \ldots + b_r t^r$	$0 \notin L$	$A_0 + A_1 t + \ldots + A_r t^r$
$e^{\lambda_0 t}$	$\lambda \notin L$	$Ae^{\lambda_0 t}$
$e^{\lambda_0 t}$	$\lambda \in L$, m-fach	$at^m e^{\lambda_0 t}$
$\cos(\omega t), \sin(\omega t)$	$\pm i\omega \notin L$	$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$
$\cos(\omega t), \sin(\omega t)$	$\pm i\omega \in L$,1-fach	$t(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$
$t^2 e^{-t}$	$-1 \notin L$	$(A_0 + A_1 t + A_2 t^2)e^{-t}$

Beispiel Bestimme allgem. Lösung der DGL

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \cos x$$

1. Homogene Lösung: $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$
2. Inhomogene Lösung:
   Ansatz (nach Tabelle):

$$\begin{aligned} y &= a\cos x + b\sin x \\ y' &= -a\sin x + b\cos x \\ y'' &= -a\cos x - b\sin x \end{aligned}$$

$y''+3y'+2y = (a+3b)\cos x + (b-3a)\sin x = \cos x$
$\Rightarrow a = \frac{1}{10}, b = \frac{3}{10}$
Allgem. Lös der DGL:
$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x$

Eulersche Differentialgleichungen

Gesucht $y = y(r)$ so dass

$$y^{(n)} + \frac{b_{n-1}}{r} y^{(n-1)} + \ldots + \frac{b_0}{r^n} = 0 \qquad (4)$$

Koeffizienten sind hier also nicht konstant. Auch hier gibt es einen Ansatz:

$$y(r) = r^\alpha$$

$y'(r) = \alpha r^{\alpha-1}$, $y^{(k)} = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)r^{\alpha-k}$
Das Indexpolynom lautet dann:

$$inp(\alpha) := \alpha\ldots(\alpha-n+1) + \ldots + \alpha b_1 + b_0 = 0$$

Falls α_i eine Nullstelle von $inp(\alpha)$ ist und gilt:

- *α_i ist einfache Nullstelle*
  so ist r^{α_i} eine linear unabhängige Lösung von (4).
- *α_i ist m-fache reelle Nullstelle*
  so sind die Funktionen $r^{\alpha_i}, r^{\alpha_i}\cdot \ln r, \ldots, r^{\alpha_i}\cdot(\ln r)^{m-1}$ linear unabhängige Lösungen von (4).
- *α_i ist einfach komplex konjugierte Nullstelle*
  wenn also $\alpha_i = \mu_i + i\nu_i, \nu_i \neq 0$ so ersetze $r^{\alpha_i}, r^{\overline{\alpha_i}}$ durch $r^{\mu_i}\cos(\nu_i \ln r)$ und $r^{\mu_i}\sin(\nu_i \ln r)$ welche zwei reelle unabhängige Lösungen von (4) sind.
- *mehrfache komplex konjugierte Nullstelle*
  so sind die rellen Lösugen der komplex konjugierten Nullstelle multipliziert mit $(\ln r)^k$ ebenfalls unabhängige Lösugen von (4).

Falls das Indexpolynom m-fache NS hat, dann gibt es folgende Lösungen:
$r^{\alpha_1}, (\ln r)\cdot r^{\alpha_1}, \ldots, (\ln r)^{m-1} r^{\alpha_1}$

Falls α komplex (r^{a+ib}):
Ersetze $r^\alpha, r^{\overline{\alpha}}$ durch $r^a\cos(b\ln r)$ und $r^a\sin(b\ln r)$

inhomogene DGL mit variablen Koeffizienten

$$y'' + p_0(t)y' + p_1(t)y = q(t) \qquad (5)$$

wobei $q(t)$ beliebig ist.

Annahme: die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung sei bekannt, z.B. p_0, p_1 konst. oder Eulersche DGL.
Ziel: daraus eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung finden.
Ansatz:

$$y_0(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$$

mit y_1, y_2 lin. unabh. Lösungen der homogenen Gleichung von (5)

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y_0' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + \underbrace{c_1' y_1 + c_2' y2}_{1.\text{ Bed } = 0}$$

$$y_0'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1' y_1' + c_2' y_2'$$

Diese Gleichung kann man wieder in die DGL einsetzen. Durch ausklammern von c_1, c_2 erhält man dann die 2.Bedingung.

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = q(t) \quad \text{2. Bedingung}$$

Mit diesen beiden Bedingungnen hat man ein Gleichungssystem aus dem man die unbekannten Funktionen bestimmen kann.

6.2. Anwendungen der $\int$-Rechnung auf Diff'Gl

Variation der Konstante

$$y' = p(x)\cdot y + q(x) \qquad (6)$$

1. homogene Lösung von (6) finden
   $y_{hom}(x) = Ce^{P(x)}$ wobei $P(x)$ die Stammfunktion von $p(x)$
2. inhomogene Lösung von (6) finden
   Dafür benutzt man den Ansatz:

$$y_{inhom}(x) = c(x)\cdot y_{hom}(x)$$

Man setzt also die homogene Lösung als "Konstante" einer unbekannten Funktion.
So erhält man schliesslich nach einsetzen in (6)

$$c'(x)\cdot y_{hom}(x) = q(x)$$

3. Die Allgemeine Lösung lautet dann

$$y(x) = y_{hom} + y_{inhom}$$

Separtion (Trennung der Variablen)

Eine DGL 1. Ordnung der Form $\frac{dy}{dx} = g(x)\cdot k(y)$ lässt sich folgendermassen lösen:

1. Trennung der beiden Variablen

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\cdot k(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{k(y)} = dx\cdot g(x)$$

2. Integration auf beiden Seiten der Gleichung

$$\int \frac{dy}{k(y)} = \int dx\cdot g(x)$$

3. nach y auflösen

Substitution

DGL 1.Ordnung können teilweise durch geschickte Substitution auf seperierbare zurückgeführt, danach kann man die neu erhaltene DGL für u lösen und rücksubstituieren:

- $y' = \Phi(\frac{y}{x})$
  $u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{\Phi(u)-u}{x}$
- $y' = \Psi(x+y+c)$
  $u = x+y \quad \Rightarrow \quad y = u-x \Rightarrow y' = u'-1 = \Psi(u)$
  Danach löse $\frac{du}{dx} = u' = \Psi(u)+1 \Rightarrow \frac{du}{\Psi(u)+1} = dx$

Beispiel Löse $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3+y^3}{3xy^2}$
Setze $u := \frac{y}{x}$. $\Rightarrow y(x) = u(x)\cdot x \Rightarrow y' = u'x + u$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2}{3}\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{3}\frac{y}{x} \\ u'x + u &= \frac{2}{3}v^- + \frac{1}{3}\frac{y}{x} \\ u'x &= \frac{2}{3}(v^{-2} - v) \end{aligned}$$

So ist $v = 1$ und damit $y = x$ eine konstante Lösung und für nicht konstantes v rechnet man mit Seperation der Variablen weiter:

$$\frac{3v'}{v^{-2} - v} = 2\frac{1}{x}$$

...

7. Vektoranalysis

7.1. Einführung

Skalarfeld

Ein Skalarfeld ordnet jedem Punkt im Raum ein Skalar zu (z.B. eine Temperaturverteilung). $\phi: \quad \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Vektorfeld

Ein Vektorfeld ordnet jedem Punkt im Raum eindeutig einen Vektor zu (z.B. Feldlinien oder Geschwindigkeit einer Flüssigkeit).

- *Coulombfeld*

$$\vec{K} = \frac{C}{r^3}\vec{r} \qquad |\vec{K} = \frac{C}{r^2}|$$

- *Gradientenfelder* Geg: $f : f(x,y,z)$

$$\vec{K} = grad\ f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

  Die Feldvektoren stehen überall senkrecht auf den Niveauflächen von f.

- *Hagen-Poiseuille Strömung*
  Modell für eine zähe Flüssigkeit in einer Leitung vom Radius R

$$\vec{v} = (0, 0, c(R^2 - (x^2 + y^2)))$$

Feldlinien

Es sei $\vec{v}$ ein Vektorfeld. Eine Kurve γ deren Tangente in jedem Punkt zum dort angehefteten Feldvektor parallel ist, heisst eine Feldlinie von $\vec{v}$. Die Feldlinien eines Gradientenfeldes ∇f sind die Orthogonaltrajektorien der Niveaulinien (Niveauflächen).

Bestimmung der Feldlinien

- in $\mathbb{R}^3$
  Die Feldlinien γ eines Vektorfelds $\vec{v}$ besitzen eine Parameterdarstellung

$$\gamma: \qquad t \mapsto \vec{x}(t) \tag{7}$$

  Wir verlangen dabei, dass der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{x}}(t)$ jederzeit gleich dem Feldvektor an der Stelle $\vec{x}(t)$ ist, in Formeln:

$$\dot{\vec{x}}(t) \equiv \vec{v}(\vec{x}(t))$$

  Diese Identität lässt sich folgendermassen interpretieren: Die Funktion (7) ist Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x)$$

Oder in Koordinaten ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= v_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x_2} &= v_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x_3} &= v_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

- ebenes Vektorfeld
  Die Feldlinien eines ebenen Vektorfeldes $\vec{v} = (P, Q)$ lassen sich schon mit Hilfe einer einzigen Differentialgleichung bestimmen

$$y' = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

Divergenz

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}, \quad div\,\vec{v} = P_x + Q_y + R_z$$

Wird anschaulich, wenn man sich eine strömende Flüssigkeit vorstellt mit dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$. Es gilt dann:

- $div\,\vec{v} > 0$: in dV gibt es eine Quelle
- $div\,\vec{v} < 0$: in dV gibt es eine Senke
- $div\,\vec{v} = 0$: in dV ist das Feld *quellenfrei*

Rotation $rot\,\vec{v} = \nabla \times \vec{v}$

in $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}, \quad rot\,\vec{v} = \begin{pmatrix} Q_X - P_Y \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}, \quad rot\,\vec{v} = \begin{pmatrix} R_Y - Q_Z \\ P_Z - R_X \\ Q_X - P_Y \end{pmatrix}$$

Wird anschaulich, wenn man sich die Wasserströmung in einem Kanal vorstellt. Das Vektorfeld ist *wirbelfrei*, wenn $rot\,\vec{v} = 0$.

Es gilt:
$rot\,\nabla\, f = \vec{0}$
$div\, rot\,\vec{K} = 0$
$div(f\cdot\vec{K}) = \nabla f\cdot\vec{K} + f\cdot div\vec{K}$
$div(\vec{K} \times \vec{L}) = \vec{L}\cdot rot\vec{K} - K\cdot rot\vec{L}$
$div(f\cdot rot\vec{K}) = \nabla f\cdot rot\vec{K}$

Linienintegrale

$Arbeit = Kraft \cdot Weg$
γ Kurve in $\mathbb{R}^3$, Kraftfeld $\vec{K} = \vec{K}(x,y,z)$
Ges: Arbeit von $\vec{K}$ längs γ von P nach Q.
Parameterdarst. $\gamma \quad t \to \vec{r}(t)$
$\vec{r}(a) = \overrightarrow{OP}$, $\vec{r}(b) = \overrightarrow{OQ}$
$\Rightarrow A = \int\limits_a^b \vec{K}(x(t), y(t), z(t))\cdot \dot{\vec{r}}(t)dt$

$$\dot{\vec{r}}dt = \begin{pmatrix} \dot{x}dt \\ \dot{y}dt \\ \dot{z}dt \end{pmatrix}, \text{ neue Schreibweise: } \vec{K} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

$A = \int\limits_\gamma \vec{K}\cdot d\vec{r} = \int\limits_\gamma (Pdx + Qdy + Rdz) = \int\limits_a^b [P(x(t), y(t), z(t))\cdot \dot{x}(t) + Q(\ldots)\cdot \dot{y}(t) + R(\ldots)\cdot \dot{z}(t)]dt$

Für ein Vektorfeld $\vec{K} = (P, Q)$ und eine Kurve

$$\gamma : \qquad t \mapsto \vec{z}(t) = (x(t), y(t))$$

in der Ebene gilt analog

$$\int_\gamma \vec{K}\cdot d\vec{z} = \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt$$

Vorgehen zur Berechnung:

1. In $\vec{K}(x,y,z)$ die Koordinaten durch die parameterabhängigen Koordinaten der Raumkurve ersetzen.
2. Den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ nach t differenzieren $\Rightarrow \dot{\vec{r}}$
3. Das Skalarprodukt $\vec{K}\cdot\dot{\vec{r}}$ bilden und dann wie gewohnt nach t integrieren.

Beispiel $\vec{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3xy \\ -5z \\ 10x \end{pmatrix}$,

und $\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} t^2+1 \\ 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ für $t \in [1,2]$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2+1 \\ 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{K}(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 3x(t)y(t) \\ -5z(t) \\ 10x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(t^2+1)\cdot 2t^2 \\ -5t^3 \\ 10(t^2+1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{K}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) &= \begin{pmatrix} 3(t^2+1)\cdot 2t^2 \\ -5t^3 \\ 10(t^2+1) \end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \\ &= 12t^2 + 12t^3 - 20t^4 + 30t^4 + 30t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{K}\cdot d\vec{x} &= \int_1^2 \vec{K}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt \\ &= \int_1^2 (12t^5 + 12t^3 + 10t^4 + 30t^2)dt \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Kalkül mit Wegen

$\int\limits_{-\gamma} \vec{K}d\vec{r} = -\int\limits_\gamma \vec{K}d\vec{r}$
$\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2} \vec{K}d\vec{r} = \int\limits_{\gamma_1} \vec{K}d\vec{r} + \int\limits_{\gamma_2} \vec{K}d\vec{r}$

konservative Felder/ Potential

Definition Ein Vektorfeld $\vec{K}$ heisst *konservativ* in einem Bereich B, falls $\forall P, Q \in B, \forall$ Kurven γ_1, γ_2 mit P=Anfanspunkt, Q=Endpunkt gilt $\int\limits_{\gamma_1} \vec{K} d\vec{r} = \int\limits_{\gamma_2} \vec{K} d\vec{r}$.
"Arbeit ist unabhängig vom Weg."

Satz Gradientenfelder sind konservativ. Wenn $\vec{K} = grad\, f$, dann gilt für alle von $\vec{p}$ nach $\vec{q}$ laufenden Kurven γ: $\int_\gamma \vec{K} d\vec{r} = f(\vec{q}) - f(\vec{p})$ (Potentialdifferenz). f wird in diesem Fall als *Potential* des Feldes $\vec{K}$ bezeichnet. Ein Gradientenfeld wird auch als Potentialfeld bezeichnet.

Satz Sei $\vec{K}$ konservativ in einem *zusammenhängendem* Bereich. Dann ist $\vec{K}$ ein Potentialfeld.

zusammenhängend $\forall P, Q \in B, \exists \gamma : P \to Q$

Potential existiert, falls das Vektorfeld $\vec{K}$ wirbelfrei ist, d.h. $rot\vec{K} = 0$. Falls K wirbelfrei, hängt das Linienintegral nicht vom Weg nach (x, y, z) ab.

Bestimmung eines Potentials für Vektorfeld $\vec{K}$

1. Testen ob gilt $rot\vec{K} = 0$
2. Bestimmen des Potentials via 2 Varianten:
   a) Komponentenweises aufleiten
   Komponenten des VF aufleiten und gleichsetzen
   b) Linienintegral berechen
   $$f(P) := \int_{P_0}^{P} \vec{K} \cdot d\vec{x}$$
   Man wählt beliebigen Weg von P_0 nach P, z.B.
   $$\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} xt \\ yt \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$
   von $P_0 := (0, 0)$ nach $P = (x, y)$. Das Potential f ergibt sich damit als:
   $$f(x, y) = \int_0^1 \vec{K}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

7.2. Die Formel von Green für ebene Vektorfelder

Ebenes Vektorfeld: $\vec{v} = (P(x, y), Q(x, y))$

B Bereich in der Ebene mit Rand ∂B, Rand so orientiert, dass B links liegt.

Satz von Green

$$\int\limits_{\partial B} \vec{v} d\vec{r} = \int\limits_{\partial B} (Pdx + Qdy) = \iint\limits_{B} (Q_x - P_y) d\mu(x, y)$$

Ein Linienintegral über einen Rand wird in ein Integral über eine Fläche umgewandelt.

Andwendung auf Flächenberechnungen

Spezialfälle der Greenschen Formel:

- $P = 0,\ Q = x,\ Q_x - P_y = 1$
  $$\iint_B 1 d\mu(x, y) = \int_{\partial B} x dy$$
- $P = -y,\ Q = 0,\ Q_x - P_y = 1$
  $$\iint_B 1 d\mu(x, y) = -\int_{\partial B} x dy$$

Somit ergeben sich 3 Formeln für den Flächeninhalt $\mu(B)$ von B:

$$\mu(B) = \begin{cases} \int_{\partial B} x dy \\ -\int_{\partial B} y dx \\ \frac{1}{2} \int_{\partial B} (x dy - y dx) \end{cases}$$

Diese Formeln sind bequem, wenn B durch Parameterdarstellung und nicht durch Ungleichungen gegeben ist.

Anwendung auf Potentialfelder

Ein Vektorfeld $\vec{K} = (P, Q)$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^{\nvDash}$ ist genau dann ein Potentialfeld ∇f, wenn gilt:

$$P_y = Q_x$$

Es gibt dann eine Funktion, deren Gradient gerade $\vec{K}$ ist. Das entspricht auch gerade der Bedingung, dass das Feld wirbelfrei ist (also $rot\, \vec{K} = 0$) und für den Raum ist dann ein Vektorfeld ein Potentialfeld, wenn $rot\, \vec{K} = 0$.

Definition Ω *einfach zusammenhängend* falls jede geschlossene Kurve in Ω sich auf einen Punkt in Ω zusammenziehen lässt.

Beispiel VF V definiert durch $V(x, y) = (f(x)xy, f(x)x)$
Bestimme f so, dass V ein Gradientenfeld ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(f(x)xy) &= \frac{\partial}{\partial x}(f(x)x) \\ f(x)x &= (f(x)x)' \\ f(x) &= \frac{e^x}{x} \end{aligned}$$

Potential davon:
$V = (e^x y, e^x)$

$$\begin{aligned} \int e^x y dx &= e^x y + f(y) \\ \int e^x dy &= e^x y + g(x) \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \text{Potential} \varphi = ye^x + c$$

Begriff des Flusses in $\mathbb{R}^2$

Gegeben sei $\vec{v} = (P, Q)$ ein Geschwindigkeitsfeld und Kurve γ (in Parameterdarstellung und offen oder geschlossen)
Gesucht sei der Fluss ϕ von $\vec{v}$ durch γ pro Zeiteinheit?

$$\phi = \int_a^b (P \cdot \dot{y} - Q \cdot \dot{x}) dt = \iint_B (Q_x - P_y) d\mu(x, y)$$

Für $\gamma = \partial B$: geschlossene Kurve, Rand eines Bereiches B (Fläche muss wieder links von der Kurve liegen). Fluss durch Rand nach aussen:

$$\phi = \int\limits_{\partial B} (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = \iint\limits_{B} div\, \vec{v} d\mu(x, y)$$

Gaussche Formel in $\mathbb{R}^2$
für $\vec{v} = \binom{P}{Q}$: $div \vec{v} = P_X + Q_Y$

Der Fluss von $\vec{v}$ über ∂B nach aussen ist gleich dem Integral der Divergenz $div\, \vec{v}$ über das Innere von B.

7.3. Der Satz von Gauss (in $\mathbb{R}^3$)

Gaussscher Integralsatz im Raum: Das Oberflächenintegral eines Vektorfeldes $\vec{v}$ über eine geschlossene Fläche ∂K ist gleich dem Volumenintegral der Divergenz von $\vec{v}$, erstreckt über das von der Fläche von ∂K eingeschlossene Volumen K:

$$\phi = \iint\limits_{\partial K} (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\omega = \iint\limits_{\partial K} (\vec{v} \cdot d\vec{\omega}) = \iiint\limits_{K} div\, \vec{v} dV$$

Wobei $\vec{n}$ die Normale nach aussen ist.

Praktisch:
Parameterdarstellung der Fläche:

$$(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$$

und somit gilt:

$$d\vec{\omega} = \vec{r_u} \times \vec{r_v} du dv$$

Hagen-Poiseuille Strömung

Fluss durch Scheibe $\perp$ Leitung (Radius R)
$\vec{v} = (0, 0, c(R^2 - r^2))$, $\quad \vec{n} = (0, 0, 1)$
Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= 0 \\ d\omega &= r dr d\varphi \end{aligned}$$

Somit ist der Fluss gleich

$$\phi = \iint\limits_{K} c(R^2 - r^2) d\omega = \frac{\pi}{2} c R^4$$

Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik

Gegeben eine Strömung wobei die Dichte folgende Form hat:

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

und ein Breich K der fest sei.

Die Masse von K zur Zeit t ist gleich:

$$M(t) = \iiint\limits_{K} \rho d\mu$$

und der momentane Zuwachs ist gleich:

$$M'(t) = \iiint \rho_t d\mu$$

Die Kontinuitätsgleichung sieht dann wie folgt aus:

$$\rho_t + div(\rho \vec{v}) = 0$$

Wärmeleitungsgleichung

Gegeben sei eine zeitabhängige Temperaturverteilung $u(x, y, z, t)$ im Raum und K ein Bereich darin. Gesucht ist der Wärmefluss durch ∂K Die Wärmeleitungsgleichung lautet wie folgt:

$$c \rho u_t - k \Delta u = 0$$

c: Wärmekapazität, ρ: Dichte, k Phys. Grösse
$\Delta u := u_{XX} + u_{YY} + u_{ZZ}$ (Laplace Operator)

7.4. Satz von Stokes

S Fläche im Raum mit Rand ∂S. ∂S orientiert, Normale $\vec{n}$ auf S nach Korkzieherregel kompatibel mit Orientierung auf S.

$$\oint\limits_{\partial S} \vec{K} d\vec{r} = \iint\limits_{S} (rot\, \vec{K}) \vec{n} d\omega$$

für eine ebene Fläche gilt:
$\int\limits_{\partial S} \vec{K} d\vec{r} = \iint\limits_{S} (Q_X - P_Y) d\mu$ (Formel von Green)

Physikalische Interpretation

Scheibe mit Radius ϵ und Normale $\vec{n}$
Die "Zirkulation" oder Arbeit ist dann:

$$\int\limits_{\partial K(\vec{n}, \epsilon)} \vec{v} d\vec{r} = \iint\limits_{K(\vec{n}, \epsilon)} (rot\, \vec{v} \cdot \vec{n}) d\mu = (rot\, \vec{v} \cdot \vec{n}) \pi \epsilon^2$$

Falls *Wirbel* vorhanden, dann ist $\int\limits_{\partial K(\vec{n}, \epsilon)} \vec{v} \cdot d\vec{r} \neq 0$

$\vec{v}$ heisst *wirbelfrei* falls $rot\, \vec{v} = \vec{0}$

Integrabilitätsbedingungen

Aus $rot\ \vec{v} = 0$ folgt, dass $\vec{v} = grad\ f$ in einem Bereich $\mathbb{R}^3$, falls B zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Es gilt also:

$$rot\ \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = grad\ f$$

$$f(P) = \int\limits_{\gamma:P_0 \to P} \vec{v} d\vec{r}$$

A. Stereometrie

A.1. Kreiszylinder

$$\begin{array}{lcl} S &=& 2\pi r(r+h)) \\ V &=& \pi r^2 h \end{array}$$

A.2. Gerader Kreiskegel

$$\begin{array}{lcl} S &=& \pi r(r+s)) \\ V &=& \frac{\pi}{3} r^2 h \end{array}$$

A.3. Kugel

$$\begin{array}{lcl} S &=& 4\pi r^2 \\ V &=& \frac{4\pi}{3} r^3 \end{array}$$